UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMON
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CUADERNILLO DE EJERCICIOS

1. ARITMÉTICA
2. ÁLGEBRA
3. GEOMETRÍA
4. TRIGONOMETRÍA

Cochabamba - Bolivia

Cuadernillo de Ejercicios de Aritmética Álgebra Geometría Trigonometría

Elaborado Por:
Ing. M.Sc. Hernán Flores García
Lic. Gualberto Cupe
Auxiliar Univ: Arcenio Canaviri Calle

Gestión I/2009

Septiembre 2009

0.1. PRESENTACIÓN.-

Las matemáticas se constituyen actualmente en el lenguaje simbólico de las ciencias y la tecnología que permiten expresar de manera apropiada tanto a los objetos de estudio como también la relaciones existentes entre dichos objetos. Las materias correspondientes a las áreas de las matemáticas, física y química; materias fundamentales de la mayoría de las carreras de formación profesional de la Facultad de Ciencias y Tecnología; requieren un apoyo y dominio de conocimientos previos sintetizados en las asignaturas de Aritmética, älgebra, Geometría y Trigonometría; materias que se cursan en el ciclo medio de estudios pero que en general requieren una consolidación firme previo al ingreso a la Universidad.

Uno de los caminos adecuados para el aprendizaje de las matemáticas consiste en la realización de ejercicios expresados tanto en forma geométrica (visual) como también de manera algebraica (simbólica literal). La forma geométrica y la forma algebraica son dos maneras de ver un mismo problema y por lo tanto son visiones complementarias que se refuerzan mutuamente en el proceso de aprendizaje.

La resolución de ejercicios y problemas matemáticos requiere para su buena comprensión inicialmente de la construcción (visual) de figuras y diagramas seguido de un empleo de números para cuantificar la mayoría de los elementos explicitados como datos o información de entrada. Posteriormente corresponde traducir, a partir de la anterior información, todas relaciones existentes entre los datos de entrada juntamente con los datos desconocidos denominados incógnitas. Todo este proceso culmina en la resolución de ecuaciones o determinación de los valores desconocidos; así como también en el análisis del problema a partir de los valores determinados en la resolución de las ecuaciones.

El presente documento conformado por ejercicios correspondientes a la Aritmética, älgebra, Geometría y Trigonometría constituyen una referencia para la prueba de ingreso a la Universidad Mayor de San Simón, para las carreras de formación profesional relativas a la Facultad de Ciencias y Tecnología.

Como primer documento elaborado con el propósito de informar acerca del nivel de las pruebas de ingreso a la Universidad, se irá corrigiendo, mejorando y complementando a través de su empleo en los cursos propedeúticos organizados para los postulantes a la Universidad.

Para concluir es necesario reiterar a los lectores estudiosos que harán uso de este documento para apropiarse; y a la vez poner a prueba, los conocimientos básicos de las matemáticas; que todo el esfuerzo entregado al aprendizaje de las matemáticas se constituyen en una semilla que se desarrollará rápidamente y con amplias perspectivas durante los estudios universitarios y es la garantía de un exitoso aprovechamiento tanto en materias de matemáticas , como en las de física y química.

Índice general

Capítulo 1

ARITMÉTICA

Un admirable y grandioso logro de la humanidad ha sido la construcción de un sistema de numeración para designar cantidades y/o medidas de de diferentes clases de objetos, como también crear símbolos para definir relaciones cuantitativas entre ellos.

Los objetos propios de la Aritmética son símbolos denominados números que se utilizan para caracterizar ciertas propiedades específicas de objetos de la realidad; por ejemplo el largo, ancho y área de un piso rectangular. Por otra parte, en la Aritmética se estudia las operaciones de suma y multiplicación que caracterizan o traducen simbólicamente los conceptos de reunir objetos (suma) y de reunir repetidamente grupos idénticos (multiplicación). Existen importantes relaciones entre los números expresadas en términos de las operaciones de suma y multiplicación denominadas operaciones fundamentales.

Las partes centrales de la Aritmética requeridas en la formación universitaria corespondiente al área de las ciencias y la tecnología se refiere sobre todo a:

1.- la comprensión de problemas referidos a números enteros, su planteamiento en símbolos numéricos, su resolución empleando razonamientos o argumentos lógicos y acabando con una discusión de los resultados obtenidos.

2.- descomponer los números naturales en una determinada cantidad de partes iguales (divisores) y reconocer cuándo no es posible hacerlo (números primos).

3.- un manejo no solamente operacional, sino considerando el significado contextual, de los números fraccionario y/o decimales; culminando con la comprensión, traducción simbólica, resolución y análisis de problemas referidos a esta clase de números.

4.- manejar correctamente las relaciones de proporción (directas, inversas) que se dan entre magnitudes y utilizar esas relaciones en la resolución de diferentes problemas referidos a reglas de tres, razones y porcentajes.

Si bien un estudiante que está preparándose para ingresar a la Universidad ya conoce el álgebra y por tanto es propenso a utilizarlo en la resolución de problemas de aritmética; el empleo del lenguaje algebraico no está permitido en una primera vez. Lo anterior ocasiona en general (al no disponer de herramientas algebraicas), que un problema aritmético sea de más difícil resolución que un problema algebraico.

1.1. TEORÍA - EJEMPLOS

1. **ADICIÓN**: La adición es la operación que a cada par ordenado de números llamados sumandos, le hace corresponder un tercer número al cual se le da el nombre de suma.

$$\boxed{\text{A+B=S}}$$

1.1 **LEYES FORMALES**

1.1.1 **CLAUSURA**: La suma de dos o más números enteros resulta un número entero

1.1.2 **CONMUTATIVA**: En la adición el orden de los sumandos no altera la suma total

1.1.3 **ASOCIATIVA:** En la adición, la suma de varios sumandos no varia si se asocian dos o más sumandos en uno solo.

1.1.3 **MODULATIVA:** Existe un único número llamado cero (elemento neutro), tal que todo número sumado con cero resulte el mismo número.

2. **SUSTRACCIÓN:** La sustracción de número naturales es la operación que hace corresponder a cada par de números naturales llamados minuendo (M) y sustraendo (S). Un tercer numero natural llamado diferencia(D)

$$\boxed{\text{D=M-S}}$$

2.1 **LEYES FORMALES:**

2.1.1 **CLAUSURA:** La diferencia de dos números enteros es otro número entero

2.1.2 **LEY DEL INVERSO ADITIVO:** Para todo número existe uno y solo un número llamado inverso aditivo.

2.2 **PROPIEDADES DE LA SUSTRACCIÓN.**

En toda sustracción la suma de lo tres elementos de ella es igual al doble del minuendo

3. **MULTIPLICACIÓN:** Es la operación donde a cada par ordenado de números llamados factores le hace corresponder un tercer número denominado producto

$$\boxed{A \times B = C}$$

3.1 **LEYES FORMALES:**

3.1.1 **CLAUSURA:** El producto de dos números enteros resulta un número entero.

3.1.2 **CONMUTATIVA:** El orden de los factores no altera el producto.

3.1.3 **MODULATIVA:** Existe uno y solo un número que es el elemento neutro multiplicativo que se denota por "1"

4 **DIVISIÓN:** Es la operación que hace corresponder a un par ordenado de números naturales un tercer numero natural llamado cociente

SIMBOLOGÍA

D: Dividendo.
d: Divisor.
q: Cociente por defecto.
q + 1: Cociente por exceso.
r: Residuo por defecto
r_e : Residuo por exceso

4.1 **CLASES DE DIVISIÓN**

4.1.1 **DIVISIÓN EXACTA:** Aquella en la cual el dividendo contiene al divisor un número entero "q"de veces en forma exacta

$$\boxed{D = q \times d}$$

4.1.2 **DIVISIÓN INEXACTA O EUCLIDIANA:**División por defecto cuando el dividendo contiene al divisor "q"veces, sobrando “r” unidades donde r >0.

$$\boxed{D = q \times d + r}$$

4.1.3 **DIVISIÓN POR EXCESO**: Es cuando el dividendo contiene al divisor una vez más que lo normal y aparece un residuo por exceso

$$\boxed{D = (q + 1) \times d - r_e}$$

5 **DIVISIBILIDAD:** Se llama divisibilidad a la parte de la teoría de los números que estudia las condiciones que debe reunir un número para que sea divisible por otro.

5,1,1 **MÚLTIPLO:** Un numero “A” es múltiplo de otro “B” cuando “A” contiene a “B” cierto numero entero y exacto de veces

$$A = kB$$

5.1.2 **DIVISOR:** Se dice que un número “B” es divisor o divide a “A” cuando esta contenido un número entero de veces.

6 **CRITERIOS DE LA DIVISIBILIDAD**

- Un número es divisible por dos cuando termina en 0 o en cifra par.

Ejemplo 1.1 $n = 436 = 2 \times 218$

- Un número es divisible por tres cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo 1.2 $p = 936 = 9 + 3 + 6 = m3$. *(m3: indica que p=936 es múltiplo de tres)*

- Un número es divisible por 4 cuando termina en 00 o las dos últimas cifras son múltiplos de 4.

Ejemplo 1.3 $p = 232,\ 32 = m4$ *(m4: indica que* 32 *es múltiplo de* 4*)*

- Un número es divisible por 6 cuando cumplen simultáneamente el criterio de divisibilidad por 2 y 3.

Ejemplo 1.4 $p = 264$. *Termina en* 4 *y* $2 + 6 + 4 = m3$ *(m3 indica que p=264 es múltiplo de* 3*)*

7 NÚMEROS PRIMOS

7.1.1 **NÚMEROS PRIMOS ABSOLUTOS:** Son aquellos que tienen solo dos divisores, el mismo número y la unidad

Ejemplos de numeros primos absolutos $2, 3, 5, 7,$

7.1.2 **NÚMEROS COMPUESTOS:** Son aquellos números que tienen más de dos divisores

Ejemplos $4, 9, 15, 27,$

7.1.3 **NUMEROS PRIMOS RELATIVOS ENTRE SI(PESI):** Llamados también primos relativos; se denomina así al conjunto de números que tiene como único divisor común la unidad.

Ejemplo 1.5 *Los siguientes conjuntos son de números primos relativos entre si.*

$A = 2, 4, 7, 15$
Los divisores de 2 son 1 y 2.
Los divisores de 4 son 1, 2 y 4.
Los divisores de 7 son 1 y 7.
Los divisores de 15 son 1, 3, 5 y 15.

7.1.3.1 **REGLA PARA DETERMINAR SI UN NÚMERO PRIMO ES ABSOLUTO**
Ejemplo: Determinar 45 es numero primo.

PASO 1: Se extrae la raíz cuadrada del número $\sqrt{45} = 6.708$

PASO2: Se divide el número entre todos los números primos menores o iguales a la raíz entera.

$45/6 = 7{,}5$
$45/5 = 9$

PASO3: Si todas las divisiones enteras son inexactas, entonces el número en cuestión es primo absoluto. Pero si alguna división hubiera sido exacta.

45 no es número primo.

OBSERVACIÓN: A partir del segundo paso se pude aplicar los criterios de divisibilidad.

DETERMINACIÓN DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO.

- Se descompone el número en sus factores primos.

Ejemplo 1.6 : $N = 45 = 3^2 \times 5$

- Se selecciona los factores de mayor potencia, si hay varios se elige el de menor valor.
- Seleccionamos 3^2 y escribimos este factor en fila desde la potencia cero.

$$\begin{array}{ccc} 3^o & 3^1 & 3^2 \\ \underline{1} & \underline{3} & \underline{9} \end{array}$$

- Los demás factores se los escribe en columna desde la potencia uno. Y se procede a multiplicar cada uno de estos factores por los que están en fila, hasta obtener el valor numérico.

	1	3	9
5	5	15	45

- El número de divisores de un número está dado por el producto de los exponentes de los factores aumentados en una unidad.
  $N = 45 = 3^2 \times 5$
  Divisores: $(2 + 1)(1 + 1) = 6$

8 **MÁXIMO COMÚN DIVISOR**

El MCD de varios números naturales es otro natural que cumple dos condiciones:

1.- Es divisor común de los números dados
2.- Es el mayor posible
Ejemplo: Hallar el MCD de 24 y 40.

Números	Divisores
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40

1.- Sus divisores comunes son:1, 2, 4, 8.
2.- E1 mayor es 8.
El $MCD(24, 40)$ es 8.
8.1 **MÉTODOS DE DETERMINACIÓN DEL** MCD.

El MCD se puede determinar por los siguientes métodos:

- **MÉTODO 1: FACTORIZACIÓN INDIVIDUAL** Luego de descomponer a los números en sus factores primos, se toman únicamente los factores comunes afectados de sus menores exponentes.
- **MÉTODO 2: POR FACTORIZACIÓN SIMULTÁNEA.**

  Se escriben los números en fila, luego se dividen simultáneamente del menor al mayor factor primo común a dichos números, hasta que los cocientes sean números primos relativos entre si.
- **MÉTODO 3: ALGORITMO DE EUCLIDES O DIVISIONES SUCESIVAS**

Ejemplo 1.7 *: Hallar el* MCD *de* 24 *y* 40
Método 1:
$24 = 2^3 \times 3$
$40 = 2^3 \times 5$ *El factor común con su menor exponente es*
$2^3 = 8$
Método 2:

24	40	2
12	20	2
6	10	2
3	5	

$$\begin{array}{r|l} 40 & 24 \\ \hline (16) & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 16 \\ \hline (8) & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 8 \\ \hline (0) & 2 \end{array}$$

Estos valores pueden ser anotados en una tabla.

Cocientes		1	1	2
Divisores	40	24	16	8
Residuos	16	8	0	

El divisor que produce residuo cero es 8*, entonces el* MCD *de* 24 *y* 40 *es* 8*.*
8.1.1 ***PROPIEDADES DEL*** MCD

- Sean dos números A y B primos relativos entre si, entonces el MCD es 1
- Si A es múltiplo de B, entonces el MCD de A y B es B.
- Si se multiplican varios números por una misma cantidad, su MCD que multiplicado por dicha cantidad

9 **MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO:** El MCM de varios números naturales es aquel numero natural que cumple dos condiciones:

1. Es un múltiplo común de todos
2. Es el menor posible.

Ejemplo 1.8 *Hallar el* MCM *de* 4, 6

.

Números	Múltiplos
4	$4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 42, 46$
6	$6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60$

Es un múltiplo común de todos 12, 24, 36
El menor múltiplo común de todos es 12
Se determina el MCM por descomposición simultáneamente y esta formado por los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.
9.1 **PROPIEDADES DEL MCM**

- Sean dos números A y B primos relativos entre si, entonces el MCM es su producto
- Si A es múltiplo de B entonces el MCM es el mayor, en este caso A.
- Los cocientes de dividir el MCM de un conjunto de dos o mas números enteros positivos entre cada uno de ellos, son siempre números primos relativos entre si.
  $4 = 2^2$
  $6 = 2 \times 3$ Entonces el MCM de 6 y 4 será: $2^2 \times 3 = 12$.

1.1.1. EJERCICIOS RESUELTOS:

Ejercicio 1.1 *La suma del minuendo, el sustraendo y la diferencia es* 64*. Además el producto del sustraendo por la diferencia es el séxtuplo del minuendo. Indicar la resta del sustraendo y la diferencia.*

Solución:
$M - S = D \Rightarrow M = S + D$
$M + S + D = 64 \Rightarrow M = 32$
$S \times D = 6 \times M = 192$
$S \times (M - S) = 192$
$S^2 - 32S + 182 = 0$
$S = 8 : S = 24$
$D = M - S = 32 - 8 = 8$
$S - D = 24 - 8 = 16$

Ejercicio 1.2 *Si el campeonato de la liga de fútbol zonal se realiza con* 24 *equipos. ¿Cuántos partidos se jugaran en el torneo si todos juegan contra todos en una sola ronda? ¿Cuál es la duración del torneo, si se juegan* 12 *partidos por semana?*

Solución: Cada equipo con lo s23 equipos restantes una sola vez, como en total son 24 equipos

Se realizaran: $\dfrac{23 \times 24}{2} = 276$ partidos en: $\dfrac{276}{12} = 23$ Semanas.

Ejercicio 1.3 *Demostrar que el divisor de la división es igual a la suma de los residuos por defecto y por exceso* $(d = r_d + r_e)$.

Solución:
$D = dq + r$
$D = d(q+1) - r'$
$d(q+1) - r' = dq + r$
$d = r + r'$

Ejercicio 1.4 *Aumentando en nueve a los dos factores de un producto, el producto aumenta en* 549. *Hallar uno de los factores si la diferencia entre ellos es* 18.

Solución:
$(a+9)(b+9) = ab + 9a + 9b + 81$
Aumento: $9a + 9b + 81 = 549$

$$9a + 9b = 468$$
$$\begin{cases} a + b = 52 \\ a - b = 18 \end{cases} \rightarrow a = 35,\ b = 17$$

Ejercicio 1.5 *Se compró un objeto que posteriormente se vendió, por* 457 *bolivianos, y se obtuvo una ganancia igual al doble del precio de compra más* 37 *bolivianos. ¿Cuánto costó el objeto?*

Solución:
$x + (2x + 37) = 457$
$3x = 420 : x = 140$
Costó 140 bolivianos.

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

Ejercicio 1.6 *Determinar los divisores de* 336. *Dar como respuesta la suma de ellos.*
$336 = 2^4 \times 3 \times 7$ *Tiene* $(4+1)(1+1)(1+1) = 20$ *divisores*

Solución:

	1	2	4	8	16	
3	3	6	12	24	48	
7	7	14	28	56	112	
	21	42	84	168	336	
$\sum$	32	64	128	256	512	= 992

$Suma = 992$

FRACCIONES

Es cualquier par ordenado de números de la forma $f = \dfrac{A}{B}$ con una lectura "A sobre B" donde A es un numero entero llamado numerador y B es un número entero diferente de cero llamado denominador

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

POR LA COMPARACIÓN DE SUS TÉRMINOS

Una fracción propia, es aquella cuyo valor es menor que uno.
Ejemplos:
$f = \dfrac{3}{5} < 1$
Una fracción impropia, es aquella cuyo valor es mayor que uno.
Ejemplos:
$f = \dfrac{6}{5} > 1$

POR SU DENOMINADOR

Fracción ordinaria o común, es aquella cuyo denominador es diferente de una potencia de 10.

Ejemplo 1.9 : $f = \dfrac{2}{3}$

Fracción decimal, es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

Ejemplo 1.10 $f = \dfrac{3}{10}$

POR LA COMPARACIÓN DE DIFERENTES FRACCIONES

Varias fracciones son Homogénea, cuando tienen el mismo denominador.
Ejemplo: $f = \frac{1}{3}$, $f = \frac{2}{3}$, $f = \frac{5}{3}$
Varias fracciones son Heterogénea, cuando tienen diferentes denominadores.

Ejemplo 1.11 $f = \frac{1}{3}$, $f = \frac{2}{7}$, $f = \frac{5}{8}$

OTROS CONCEPTOS

FRACCIÓN EQUIVALENTE: Es cuando tienen el mismo valor pero sus términos son diferentes.

Ejemplo 1.12 $\frac{1}{4}, \frac{8}{32}$

FRACCIÓN IRREDUCIBLE: Son aquellas fracciones cuyos términos son numero primos entre si.
Ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}$
FRACCIÓN DE FRACCIONES O FRACCIÓN COMPLEJA: Esta formado por que en su denominador o en su numerador, o en ambos, existe fracciones.
Ejemplos: $\dfrac{\frac{1}{2}}{3}, \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{7}}, \dfrac{2}{\frac{5}{7}}$

OPERACIÓN CON FRACCIONES

1 Hallar la fracción generatriz del número $0{,}4\widehat{32}$.

$$f_{generatriz} = \frac{432 - 4}{990} = \frac{428}{990} = 0,4323232\ldots$$

a) 214/495 b) 212/495 c) 214/491 d) 408/495 e) 212/491

2. Al simplificar el producto: $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ se obtiene.

$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{y}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{2}{n}$

RAZONES Se llama razón al resultado de comparar dos cantidades.

Razón Aritmética: $a-b=r$ Donde “a” es el antecedente, “b” el consecuente y “ r” la Razón Aritmética.

Razón Geométrica: $\frac{a}{b}=k$ Donde “a” es el antecedente,“b” el consecuente y “k” la Razón Geométrica.

Esta comparación se puede hacer de dos modos:

Determinando en cuanto es mayor la primera que la segunda, para lo cual se hará un resta.

Ejemplo 1.13 $6-4=2$

O calculando cuantas veces la primera contiene a la segunda.

$$f=\frac{1}{4}$$

PROPORCIONES

Dadas 4 cantidades, si el valor de la razón de las dos primeras es igual al valor de la razón de las dos restantes, entonces las 4 cantidades forman una proporción.

Los Números 8, 6 y 4, 2 forman una proporción.

$8-6=2$ Donde 8 y 2 términos extremos.
$4-2=2$ Donde 6 y 4 términos medios.
8 y 4 Son los antecedentes.
6 y 2 Son los consecuentes.

Los Números 8, 4 y 6, 3 forman una proporción.
$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Regla de tres

Regla de tres simple, resulta de comparar dos magnitudes que son directamente proporcionales.

Ejemplo 1.14 *: Un móvil recorre* $500m$*. en diez minutos, con velocidad constante. ¿Qué tiempo empleara en recorrer los siguientes 200 m. manteniendo su velocidad.?*

Planteo:

$$\begin{array}{lcl} 500\,m & & 10\,\text{minutos} \\ 200\,m & & x\,\text{minutos} \end{array}$$

$$x = \frac{10 \times 200}{500} = 4\,\text{minutos}$$

Regla de tres inversas, resulta de comparar dos magnitudes que son inversamente proporcionales

Regla de tres compuesta, resulta de comparar más de dos magnitudes.

Una regla de tres es compuesta cuando se da una serie de n valores correspondientes a n magnitudes y una segunda serie de $n-1$, valores correspondientes a las magnitudes ya mencionadas.
El objeto de la regla de tres compuesta es determinar el valor desconocido de la segunda serie.

Método de la rayas.
Las magnitudes que intervienen son clasificadas en tres clases.
Primero: Causa: realizadores de la obra o acción, y condiciones que tienen para realizarla.
Ejemplos: obreros, maquina, animales, habilidad, esfuerzo, rendimiento, etc.

Segunda: Circunstancia: Condiciones en el tiempo para realizar la obra

Ejemplo 1.15 *: Días, horas diarias, raciones diarias, costo de vida, etc*

Tercera: Efecto: Es la obra en si, lo realizado y los inconvenientes o condiciones que pone le medio para realizar el trabajo.

Ejemplos:
medidas de la obra, dificultades, resistencia del medio, gasto, etc.

Ejemplo 1.16 *Si* 6 *leñadores pueden tallar* 8 *árboles en* 8 *días. ¿En cuántos días 16 leñadores talarán* 16 *árboles con* $\frac{1}{4}$ *de rendimiento menor que el caso original ?*

Causa		Circunstancia	Efecto
Leñadores	Rendimiento	días	N^o árboles
6	1	8	8
16	.75	x	16

$$x = \frac{6 \times 1 \times 8 \times 16}{16 \times .75 \times 8} = 8$$

REGLA DEL TANTO POR CIENTO:
Se llama porcentaje al tanto por ciento a una determinada cantidad con relación a 100 unidades, esta regla es una aplicación de la regla de tres simple directa.

1.2. OPERACIONES FUNDAMENTALES

1.2.1. Operaciones con números enteros. Propiedades

1.2.2. Problemas con números enteros

1.2.3. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿ Cuándo la suma es igual a un sumando?
   Respuesta: Cuando todos los sumandos menos uno son 0.

2. La suma 2+3+5+6 se puede escribir de varios modos distintos aplicando la ley asociativa. Escribirla de 12 modos distintos.

3. Transformar la suma 9+7 en una suma equivalente de 4 sumandos. ¿Que ley se aplica?.
   Respuesta: $5 + 4 + 6 + 1$ la ley asociativa.

4. ¿Que alteración sufre una suma si un sumando aumenta 6 unidades y otro aumenta 8?
   Respuesta: Aumenta 14 unidades

5. $x + a = 59$. ¿ Cuál será la suma si x aumenta 8 y a disminuye 8?
   Respuesta: 59.

6. Un sumando aumenta 56 unidades y hay tres sumandos que disminuyen 6 cada uno ¿ Qué le sucede a la suma?
   Respuesta: Aumenta 38 unidades.

7. ¿Cuanto costó lo que al venderse en $12517\,Bs.$ deja una perdida de $1318\,Bs.$

8. Después de vender una casa perdiendo 3184 \$, presté 2006 \$ y me quedé con 15184 \$. ¿Cuánto me habia costado la casa? 20374 \$.

9. Para trasladarse de una ciudad a otra una persona ha recorrido: $38\,km$ en auto; a caballo $34\,km.$ más que en auto; en ferrocarril $316\,km$ mas que en auto y a caballo; y en avión $312\,km.$ Si todavía le faltan $516\,km$ para llegar a su destino, ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?.
   Respuesta: $1364\,km.$

10. Un hombre que nació en 1911 se casó a los 25 años; 3 años después nació su primer hijo y murió cuando el hijo tenía 27 años.¿En que año murió?
    Respuesta: 1966.

11. En reparar un auto se gastaron 86 \$; en ponerle gomas 62 \$; en pintura 19 \$ y al venderlo en 136 \$ menos que el costo, se recibieron 854 \$ ¿Cuánto ha costado en total el auto?
    Respuesta: 1157 \$.

12. Si el minuendo es 342 y el resto 156, ¿Cuál es el sustraendo?
    Respuesta: 186.

13. La suma de dos números es 518 y el mayor es 312. Hallar el menor.
    Respuesta: 206

14. El triplo de la suma de dos números es 63 y el duplo del menor, 20. Hallar el mayor.
    Respuesta: 11.

15. La diferencia de dos números es 8 y el mayor excede a la diferencia en 12. Hallar el mayor.
    Respuesta: 20.

16. El menor de dos números es 36 y el doble del exceso del mayor sobre el menor es 84. Hallar el mayor.
Respuesta: 78.

17. A nació en 1941, B en 1963 y C en 1923. ¿ En cuánto excedía en 1966 la edad de C a la diferencia de las edades de A y B'
Respuesta: 21 años

18. Un hombre deja 9500 $. para repartir entre sus tres hijos y su esposa. El mayor debe recibir 2300; el segundo 500 menos que el mayor; el tercero tanto como los dos primeros y la esposa lo restante. ¿Cuánto recibió ésta?
Respuesta: 1300 $

19. Un comerciante pide 300 $kgs.$ de mercancías. Primero le mandan 854 $kgs.$, más tarde 123 $kgs.$ menos que la primera vez y después 156 $kgs.$ más que la primera vez. ¿Cuánto falta por enviarle?
Respuesta: 405 $kgs.$

20. A 6 $cts.$ cada lápiz, ¿Cuánto importarán 7 docenas?

21. Se compran 8 libros a 2$ uno 5 lapiceros a 1 $ uno y a 4 plumas fuentes a 3$ cada una. Si se vende todo en 18 $, ¿Cuánto se pierde?
Respuesta: 15 $

22. Un auto sale de Ciudad México hacia Monterrey a 60 $km.$ por hora y otro sale de Ciudad Mexico hacia Acapulco a 70 $km.$ por hora. Si salen a las 10 de la mañana, ¿a que distancia se hallarán a la 1 de la tarde?
Respuesta: 390 $km.$

23. Compré 14 trajes a 30 $; 22 sombreros a 2 $ y 8 bastones a 5 $. Vendiendo los trajes por 560 $, Cada sombrero a 1 $ y cada bastón a 3 $. ¿gano o pierdo y cuánto?
Respuesta: 102 $

24. Un ganadero compró 80 cabezas de ganado a 40 $ una. Vendió 30 a 45 $ y 25 a 48 $. ¿Cuánto debe obtener de las que quedan para que la ganancia total sea de 400 $?
Respuesta: 1050 $.

25. Se repartió cierto número de manzanas entre 19 personas y después de dar 6 manzanas a cada persona sobraron 8 manzanas. ¿Cuántas manzanas había?
Respuesta: 122.

26. ¿Cual es el menor número que debe restarse del dividendo, en una división inexacta, para que se haga exacta?
    Respuesta: r

27. ¿Cuál es el menor número que debe añadirse al dividendo, en una división inexacta, par que se haga exacta?
    Respuesta: r'

28. Si en una división el dividendo se aumenta en un número igual al divisor, ¿que variación sufre el cociente? ¿Y el residuo'
    Respuesta: Aumenta 1; no varía.

29. Si en una división se disminuye el dividendo en un número igual al divisor. ¿que le sucede al cociente? ¿Y al residuo?
    Respuesta: Disminuye en 1; no varía.

30. Una pecera con sus peces vale 260 bolivianos, y la pecera vale 20 bolivianos más que los peces.¿Cuánto vale la pecera y cuánto los peces?.
    Respuesta: pecera 140 bolivianos; peces 120 bolivianos.

31. 8534 excede en 1400 a la suma de dos números y en 8532 a su diferencia. Hallar los dos números.
    Respuesta: 3568 y 3566.

32. La suma de dos números es 3768 y su cociente 11. Hallar los números.
    Respuesta: 3454 y 314.

33. Entre A y B tienen 12816 \$, y B tiene la tercera parte de lo que tiene A. ¿Cuánto tiene cada uno?
    Respuesta: A 9612 \$; B 3204 \$

34. Dos autos salen de dos ciudades A y B distantes entre si 840 $km.$ y van al encuentro. El de A va a 50 $km./h.$. y el de B a 70 $km./h.$. Si salieron a las
    6 a.m., ¿a que hora se encontrarán y a que distancia de A y de B?
    Respuesta: A la 1 p.m.; a 350 $km.$ de A y 490 $km.$ de B.

35. 4. A las 6 a.m. sale un auto de A a 60 $km./h.$ y va al encuentro de otro que sale de B a 80 $km./h.$, a la misma hora. Sabiendo que se encuentran a las 11 a.m., ¿cuál es la distancia entre A y B?
    Respuesta: 700 $km.$

36. Dos móviles parten de M y N distantes entre si 99 $km.$ y van al encuentro. El de M sale a las 6 a.m. a 6 $km./h.$ y el de N a las 9 a.m. a 3 $km./h.$, sabiendo que el de M descansa de 12 a 3 p.m. y a las 3 emprende de nuevo su marcha a la misma velocidad anterior, ¿a qué hora se encontrará con el de N que no varió su velocidad desde que salió y a que distancia de M y N ?
    Respuesta: A las 8 p.m.; a 66 $km.$ de M y 33 $km.$ de N ventaja es de 6 $m.$ por $seg.$, y la del otro 8 $m.$ por $seg.$ ¿en cuánto tiempo alcanzará éste al primero?
    Respuesta: 5 $seg.$

37. Un auto sale de A hacia la derecha a 90 $km./h.$ a las 12 del día y en el mismo instante otro sale de B hacia la derecha a 75 $km./h.$ (B está a la derecha de A). El de A alcanza al de B a las 7 p.m. ¿Cuál es la distancia entre A y B?
    Respuesta: 105 $km.$

38. En un colegio hay 3 aulas. La 1^{ra} y la 2^{da} juntas tienen 85 alumnos; la 2^{da} y la 3^{ra}, 75 alumnos; la 1^{ra} y la 3^{ra}, 80 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada clase?
    Respuesta: 1^{ra}, 45; 2^{da}, 40; 3^{ra}, 35.

39. ¿Cuál es el número que sumado con 14, multiplicando está suma por 11 dividiendo el producto que resulta entre 44 y restando 31 de este cociente, se obtiene 1474?
    Respuesta: 6006.

40. Tenía cierta cantidad de dinero. Pagué una deuda de 86 bolivianos; entonces recibí una cantidad igual a la que me quedaba y después presté 20 bolivianos a un amigo. Si ahora tengo 232 bolivianos, ¿Cuánto tenía al principio?
    Respuesta: 212 bolivianos.

41. Un estanque cuya capacidad es de 300 litros está vació y cerrado su desagüe. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo tres llaves que vierten, la 1^{ra}, 36 litros en 3 minutos; la 2^{da}, 48 litros en 6 minutos y la 3^{ra}, 15 litros en 3 minutos?
    Respuesta: 12 min.

42. Un estanque se puede llenar por dos llaves, una de las cuales vierte 200 litros en 5 minutos y la otra 150 litros en 6 minutos. El estanque tiene un desagüe por el que salen 8 litros en 4 minutos. ¿En cuánto tiempo se

llenará el estanque, si estando vació, se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe, sabiendo que su capacidad es de 441 litros?
Respuesta: 7 min.

43. Un depósito tiene tres llaves que vierten; la 1^{ra}, $68\,ls.$ en 4 minutos; la 2^{da}, $108\,ls$ en 6 minutos y la 3^{ra}, $248\,ls.$ en 8 minutos y un desagüe por el que salen $55\,ls.$ en 5 minutos. Si el desagüe está cerrado y se abren las tres llaves al mismo tiempo, el depósito se llena en 53 minutos. ¿En cuánto tiempo puede vaciarlo el desagüe estando lleno y cerradas las llaves?
Respuesta: $5\,h.$ 18 min.

44. Si en un estanque que está vació y cuya capacidad es de 3600 litros, se abrieran al mismo tiempo tres llaves y un desagüe, el estanque se llenaría en 15 minutos. Por el desagüe salen 240 litros en 4 minutos. Si el estanque tiene 600 litros de agua y está cerrado el desagüe, ¿ En cuánto tiempo lo acabarán de llenar las tres llaves?
Respuesta: 10 min.

45. Compré 80 libros por 5600 bolivianos. Vendí una parte por 5400, a 90 cada uno. ¿Cuántos libros me quedan y cuánto gané en cada uno de los que vendí ?
Respuesta: Quedan 20; gané 20 bolivianos.

46. Vendí 60 sacos de azúcar por 480 bolivianos, ganando 3 en cada uno. ¿Por cuántos sacos estaba integrado un pedido que hice al mismo precio y por el cual pagué 400?
Respuesta: 80 sacos.

47. Compre 90 libros. Vendí 35 de ellos por 280 $, perdiendo 3 $ en cada uno, y 30 ganando 1 $ en cada uno. ¿A como vendí los que me quedaban si en definitiva no gané ni perdí?
Respuesta: 14 $

48. Un capataz contrata un obrero ofreciendo 70 bolivianos por cada día que trabaje y 40 por cada día que, sin culpa suya , no pueda trabajar. Al cabo de 35 días el obrero ha recibido 2000. ¿Cuántos días trabajo y cuántos no?
Respuesta: Trabajo 20 días, no trabajo 15 días.

49. En un Omnibus iban 40 excursionistas. Los hombres pagaban $40\,cts.$ y las damas $25\,cts.$. Los pasajes costaron en total 13.45 $ ¿Cuántos excursionistas eran hombres y cuántas damas?
Respuesta: 23 hombres y 17 damas.

50. Un padre le pone 9 problemas a su hijo, ofreciéndole 5 $cts.$ por cada problema que resuelva, pero por cada problema que no resuelva el muchacho perderá 2 $cts.$ Después de trabajar en los 9 problemas el muchacho recibe 31 $cts.$ ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no resolvió?
Respuesta: resolvió 7, no resolvió 2.

51. Un capataz contrata un obrero, ofreciéndole 12 $ por cada día que trabaje pero con la condición de que, por cada día que el obrero, por su voluntad, deje de ir al trabajo, tendrá que pagarle al capataz 4 $. Al cabo de 18 días el obrero le debe al capataz 24 $. ¿Cuántos días ha trabajado y cuántos días ha dejado el obrero de ir al trabajo?
Respuesta:Trabajo 3 días, dejo de ir 15 días.

52. Un reloj que adelanta 4 minutos en cada hora señala las 4 y 20. Si ha estado andando 8 horas, ¿Cuál es la hora exacta?
Respuesta: 3 y 48 min.

53. Cuál es la distancia recorrida por un atleta en una carrera de obstáculos si ha vencido 15 obstáculos que distan 6 metros uno de otro, y si la línea de arrancada dista 4 metros del primer obstáculo y la meta del último 8 metros?
Respuesta: 96 $m.$

54. Un empleado que gana 65 $ semanales ahorra cada semana cierta suma. Cuando tiene ahorrados 98 $ ha ganado 455 $ ¿Cuańto ahorra a la semana
Respueta: 14 $

55. Un viajero, asomado a la ventanilla de un tren que va a 36 $km.$ por hora, observa que un tren estacionado en una vía adyacente pasa ante él en 12 segundos. ¿Cuál será la longitud de ese tren?
Respuesta: 120 $m.$

56. Un importador no quiere vender 6 automóviles cuando le ofrecen 37000 bolivianos por cada uno. Varios meses después vende los 6 por 216000. Si en este tiempo ha gastado 6840 por concepto de alquiler del local y otros gastos, ¿cuál es su pérdida en cada máquina?
Respuesta: 2140 bolivianos.

57. Con el dinero que tenía compré cierto número de entradas a 13 $cts.$ cada una y me sobraron 8 $cts.$. Si cada entrada me hubiera costado 19 $cts.$ me hubieran faltado 16 $cts.$ ¿ Cuántas entradas compré y cuánto dinero

tenía.?
Respuesta: 4, 0.60 \$.

58. ¿A como tengo que vender los libros que he comprado a 6 \$ para ganar en 15 libros el precio de compra de 5 libros?.
Respuesta: A 8 \$

59. 11 personas iban a comprar una finca que vale 214500 bolivianos, contribuyendo por partes iguales. Se suman otros amigos y deciden formar parte de la sociedad, con lo cual cada uno aporta 3000 menos que antes. ¿Cuántos fueron los que se sumaron a los primeros.?
Respuesta: 2

60. Se compran en un teatro 5 entradas de hombre y 6 de mujer por 27 \$, y más tarde se compran 8 de hombre y 6 de mujer por 36 \$. ¿ Cuánto cuesta cada entrada de hombre y cuánto cada una de mujer?
Respuesta: De hombre 3 \$ de mujer 2 \$.

1.3. DIVISIBILIDAD

1.3.1. Teoremas básicos

1.3.2. Criterios de divisibilidad

1.3.3. Números primos.Teoremas básicos

1.3.4. Descomposición en factores primos

1.3.5. Máximo común divisor y mínimo común divisor

1.3.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el más pequeño número que tenga15 divisores.
Respuesta: 144

2. Hallar dos números enteros sabiendo que susuma es 220 y su $m.c.d.$es 20.
Respuesta: 200 y 20; 160 y 60; 120 y 50; 180 y 40; 140 y 80

3. Hallar el número de 3 cifras consecutivas crecientes quees divisible por 7. Su cifra de decenas es:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

4. La suma de las cifras de un números es 75. Si este es lomenor posible siempre será un múltiplo de.

   A) 17 B) 23 C) 7 D) 9 E) 25

5. Cuántos divisores primos como máximo puede tener:
   $3551 \times a\,(a < 10)$
   A) 4 B) 32 C) 16 D) 9 E) 18

6. Cuántos pares de números existen tales que su producto sea4050

   A) 18 B) 25 C) 12 D) 15 E) 16

7. Se aplica el algoritmo de Euclídes para obtener el $M.C.D.$ de dos números obteniéndose como cocientes sucesivos $1; 2; 2; 3; 2.$ si el $M.C.D.$ ES 30 ¿Cuál es la diferencia de los dos números ?
   A) 280 B) 560 C) 420 D) 480 E) 240

8. Al calcular el $M.C.D.$ de los números 5529 y 6441 por divisores sucesivos . ¿Cuál fue la suma de los cocientes?

   A) 15 B) 18 C) 21 D) 22 E) 23

9. Dados 4 números $A; B; C$ y D se observa que:
   $M.C.D.(A; B; C) = 84$
   $M.C.D.(B; C; D) = 396$
   ¿Cual es el $M.C.D.(A; B; C; D)$?

   A) 6 B) 18 C) 12 D) 24 E) 36

10. El $M.C.D.$ de 3 númreros es 36; si se suman 4 unidades acada uno de ellos, en ese caso su $M.C.D.$ puede ser:

    A) 4 B) 6 C) 8 D) 5 E) $N.A.$

11. Hallar la suma de las cifras del $M.CM.$ de dos números cuya suma es 793 y cuyo producto es 121680

    A) 20 B) 15 C) 18 D) 17 E) 13

12. Un libro tiene 256 páginas, otro tiene 160 páginas, suponiendo que los dos están formados por cuadernillos del mismo número de páginas es

que este es número menor que 30 pero mayor que 10. Dígase cuántos cuadernillos tiene en total los 2 libros.
A) 13 B) 18 C) 36 D) 15 E) 26

13. Para hallar el mayor múltiplo de 11 contenido en 2738, ¿ en cuánto se debe disminuir ese número?

14. ¿Cuál es la diferencia entre 781 y el mayor múltiplo de 9 contenido en él?

15. Escribir tres números, cuatro números primos entre si dos a dos.

16. De los números 24, 31, 27, 36, 42, 53 y 14 formar: Un grupo de cuatro números que no sean primos entre sí; un grupo de cuatro que sean primos entre sí; un grupo de cuatro que sean primos dos a dos.

17. Las edades de Alex, Carlos y Roberto que son tres números enteros consecutivos, suman 87 años. Si Roberto es el menor y Alex el mayor, ¿Cuál es la edad de cada uno ?

18. Averiguar si son o no primos los números siguientes de los incisos *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*):
a) 139. *b*) 289. *c*) 751. *d*) 881. *e*) 997., *f*) 601. *g*) 529.

19. Hallar todos los divisores simples y compuestos de 315, hallando primero el número de divisores:
Respuesta: 12 fact.: 1, 3, 9, 5, 15, 45, 7, 21, 63, 35, 105, 315.

20. Hallar todos los divisores simples y compuestos de 1521, hallando primero el número de divisores:
Respuesta: 9 fact.: 1, 3, 9, 13, 39, 117, 169, 507, 1521.

21. Hallar todos los divisores simples y compuestos de 1080, hallando primero el número de divisores:
Respuesta: 32 fact. 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 27, 54, 108, 216, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360, 135, 270, 540, 1080.

22. Hallar todos los divisores simples y compuestos de 4459, hallando primero el número de divisores:
Respuesta: 8 fact.: 1, 7, 49, 343, 13, 91, 637, 4459.

23. Hallar todos los divisores simples y compuestos de 6006, hallando primero el número de divisores:
Respuesta: 32 fact.: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231,

462, 13, 26, 39, 78, 91, 182, 273, 546, 143, 286, 429, 858, 1001, 2002, 303, 6006.

24. Hallar todos los divisores simples y compuestos de 14161, hallando primero el número de divisores:
Respuesta: 9 fact.: 1, 7, 49, 17, 119, 833, 289, 2023, 14161.

25. Hallar por divisiones sucesivas el $m.c.d.$ de 78, 130 y 143.
Respuesta: 13.

26. Hallar por divisiones sucesivas el $m.c.d.$ de 168, 252, 280 y 917.
Respuesta: 7.

27. Hallar por divisiones sucesivas el $m.c.d.$ de 31740, 47610, 95220 y 126960.
Respuesta: 15870.

28. Cite 3 divisores comunes de los números 12, 24 y 48.

29. Diga por inspección, cuál es el $m.c.d.$ de 7 y 11; de 8, 9 y 10; de 25, 27 y 36.

30. ¿Puedes ser 4 y 6 los cocientes de dividir dos números por su $m.c.d.$?

31. Hallar por descomposición en factores primos (puede usarse el método abreviado) el $m.c.d.$ de los incisos a), b), c) y d):
a) 345 y 850. b) 54, 76, 114 y 234. c) 840, 960, 7260 y 9135.
d) 2645, 4232, 4761 y 5819.
Respuestas: a) 5. b) 2. c) 15. d) 529.

32. ¿Se podrán dividir 3 varillas de $20\,cm.$, $24\,cm.$ y $30\,cm.$ en pedazos de $4\,cm.$ de longitud sin que sobre ni falte nada entre cada varilla?

33. Dos cintas de 36 metros y 48 metros de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿ Cuál será la longitud de cada pedazo?
Respuesta $12\,m.$

34. ¿Cuál será la mayor longitud de una medida con la que se puedan medir exactamente tres dimensiones de 140 metros, 560 metros y 800 metros?
Respuesta: $20\,m.$

35. Se tienen tres cajas que contienen 1600 libras, 2000 libras y 3392 libras de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso y el mayor posible .¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos

bloques hay en cada caja?
Respuesta: 16 $lbs.$; en la 1^{ra}, 100; en la 2^{da}, 125; en la 3^{ra}, 212.

36. Se quieren envasar 161 kilos, 253 kilos y 207 kilos de plomo en tres cajas, de modo que los bloques de plomo de cada caja tengan el mismo peso y el mayor posible. ¿Cuánto pesa cada pedazo de plomo y cuántos caben en cada caja?
Respuesta: 23 kilos; en la 1^{ra}, 7; en la 2^{da}, 11; en la 3^{ra}, 9

37. Se tienen tres extensiones de 3675, 1575 y 2275 metros cuadrados de superficie respectivamente y quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas de cada una sea el menor posible?
Respuesta: $175\,m^2$.

38. Hallar por medio del *m.c.d.* el *m.c.m.* de 125 y 360.
Respuesta: 9000.

39. Hallar por medio del *m.c.d.* el *m.c.m.* de 254 y 360.
Respuesta: 45720.

40. Hallar por medio del *m.c.d.* el *m.c.m.* de 9504 y 14688.
Respuesta: 161568.

41. Hallar por medio del *m.c.d.* el *m.c.m.* de 56, 72, 124 y 360.
Respuesta: 78120.

42. Hallar por medio del *m.c.d.* el *m.c.m.* de 58, 85, 121, 145 y 154.
Respuesta: 4175710.

43. ¿Con qué cantidad, menor que $40\,cts.$, podré comprar un número exacto de manzanas de a $4\,cts.$, $6\,cts.$ y $9\,cts.$ cada una?

44. ¿Cuál es la menor suma de dinero que se puede tener en billetes de a 2 \$, de a 5 \$ o de a 20 \$ y cuántos billetes de cada denominación harían falta en cada caso?

45. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de tres llaves que vierten; la 1^{ra}, 12 litros por minuto; la 2^{da}, 18 litros por minuto y la 3^{ra}, 20 litros por minuto?
Respuesta: 180 litros.

46. ¿Cuál será la menor longitud de una varilla que se puede dividir en pedazos de $8\,cm.$, $9\,cm.$ o $15\,cm.$ de longitud sin que sobre ni falte nada y cuántos pedazos de cada longitud se podrían sacar de esa varilla?
Respuesta: $360\,cm.$; 45 de 8, 40 de 9 y 24 de 15.

47. Hallar el menor número de bombones necesario para repartir entre tres clases de 20 alumnos, 25 alumnos o 30 alumnos, de modo que cada alumno reciba un número exacto de bombones y cuántos bombones recibirá cada alumno de la 1^{ra}, de la 2^{da} o de la 3^{ra} clase.
Respuesta: 300 bomb.; de la 1^{ra}, 15; de la 2^{da}, 12; de la 3^{ra}, 10

48. Tres galgos arrancan juntos en una carrera en que la pista es circular. Si el primero tarda 10 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 11 segundos y el tercero 12 segundos, ¿al cabo de cuántos segundos pasarán juntos por la línea de salida y cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo?
Respuesta: $660\,seg.$ u $11\,min.$; el 1^{ro}, 66; el 2^{do}, 60; el 3^{ro}, 55.

49. Tres aviones salen de una misma ciudad, el 1^{ro} cada 8 días, el 2^{do} cada 10 días y el 3^{ro} cada 20 días. Si salen juntos de ese aeropuerto el día 2 de enero, ¿cuáles serán las dos fechas más próximas en que volverán en salir juntos? (el año no bisiesto).
Respuesta: 11 de febrero y 23 de marzo.

1.4. NÚMEROS FRACCIONARIOS

1.4.1. Operaciones con números fraccionarios

1.4.2. Simplificación de fracciones

1.4.3. Problemas con números fraccionarios

1.4.4. Numeros decimales. Operaciones con números decimales. Problemas

1.4.5. Sistema métrico decimal. Transformadas de unidades

1.4.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Cuántas fracciones cuyo numerador es la unidad dan un decimal exacto con 9 cifras decimales.
A) 12 B) 15 C) 19 D) 23 E) *Ninguno*

2. ¿Cuántas fracciones periódicas puras de dos cifras de periodo existen entre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$?
   A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 17

3. Si se quiere que la fracción $\frac{N}{D}$ esté comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ cuando $N = 12$. ¿Cuátos valores enteros puede tomar D?
   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

4. Un grifo puede llenar un estanque en 6 horas y un desagüe puede vaciarlo en 8 horas. ¿En que tiempo llenaría los $\frac{3}{4}$ del estanque, si cuando se abre el grifo y el desagüe, $\frac{1}{3}$ del estanque ya está lleno de agua?
   A) 6 horas B) 8 horas C) 12 horas D) 10 horas
   E) *ninguno.*

5. Un depósito puede ser llenado por los conductos A y B en 70 minutos y por los conductos B y C en 140 minutos. ¿Cuál de los tres conductos mencionados es el más lento?
   A) A B) C C) B D) A ó B E) A ó C

6. Un grifo puede llenar un estanque en 8 horas y otro en 12 horas, mientras el tubo de desagüe lo vacía en 5 horas. Cuando el estanque está lleno hasta $\frac{1}{3}$ de altura se abren los grifos y el tubo de desagüe durante una hora. ¿Qué fracción de depósito quedara al fin por llenar?
   A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{8}{11}$ D) $\frac{21}{40}$ E) *ninguno*

7. La mitad de lo que me queda de gaseosa en la botella es igual a la tercera parte lo que ya me tome. Si tomo la cuarta parte de lo que me queda. ¿ Qué fracción de toda mi gaseosa me habré tomado?
   A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{11}{19}$ E) *ninguno*

8. Una vagoneta llena de cal pesa 3720 kg; cuando contiene los $\frac{5}{8}$ de su capacidad pesa $\frac{95}{124}$ del peso anterior . Hallar el peso de la vagoneta vacía.
   A) 7000 kg B) 1000 kg C) 1400 kg D) 2100 kg
   E) 2400 kg

9. El costo de almacenaje diario en una aduana es $\frac{1}{10}$ del valor de la mercadería. Un comerciante comienza a retirar, al final de cada día, $\frac{1}{5}$ de la mercadería almacenada.
¿ cuál debe ser el valor total de almacenaje?
A) $\frac{3}{10}$ B) $\frac{4}{21}$ C) $\frac{5}{46}$ D) $\frac{3}{20}$ E) $\frac{1}{20}$

10. ¿Cuántos novenos hay en una unidad, en 4 unidades, en 7 unidades?

11. ¿Cuántos treceavos hay en 2 unidades, en 5 unidades?

12. ¿Cuantos medios hay en la mitad de una unidad; Cuántos tercios en la tercera parte de una unidad; cuántos octavos en la octava parte de una unidad?

13. Si una manzana la divido en 5 partes iguales y a un muchacho le doy tres de esas partes y a otro el resto, ¿cómo se llaman las partes que he dado a cada uno?

14. Diga en cuánto aumenta cada uno de los quebrados $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}$ al añadir 3 al numerador.

15. 17. Diga en cuánto disminuye cada uno de los quebrados $\frac{7}{8}, \frac{10}{9}, \frac{17}{35}$ al restar 6 al numerador.

16. ¿Aumenta o disminuye $\frac{8}{13}$ si se suma 5 a sus do términos; si se resta 3?

17. ¿Disminuye o aumenta $\frac{16}{11}$ si se suman 6 a sus dos términos; si se resta 5?

18. ¿Cuál es mayor $\frac{17}{12}$ o $\frac{14}{9}$; $\frac{6}{5}$ u $\frac{9}{8}$?

19. ¿Es $\frac{7}{51}$ mayor o menor que $\frac{7}{17}$ y cuántas veces?

20. Reducir $\frac{11}{76}$ a quebrado equivalente de denominador 684.
Respuesta: $\frac{99}{684}$.

21. Reducir $\frac{7}{81}$ a quebrado equivalente de denominador 729.
    Respuesta: $\frac{63}{729}$.

22. Reducir $\frac{7}{12}$ a quebrado equivalente de denominador 1296.
    Respuesta: $\frac{756}{1296}$.

23. Reducir $\frac{5}{18}$ a quebrado equivalente de denominador 3600.
    Respuesta: $\frac{1000}{3600}$.

24. Reducir $\frac{480}{824}$ a quebrado equivalente de denominador 103.
    Respuesta: $\frac{60}{103}$.

25. Reducir $\frac{729}{1395}$ a quebrado equivalente de denominador 465.
    Respuesta: $\frac{243}{465}$.

26. Reducir $\frac{320}{2720}$ a quebrado equivalente de denominador 17.
    Respuesta: $\frac{2}{17}$.

27. Reducir a su más simple expresión $\frac{343}{539}$
    Respuesta: $\frac{7}{11}$

28. Reducir a su más simple expresión $\frac{260}{286}$
    Respuesta: $\frac{10}{11}$

29. Reducir a su más simple expresión $\frac{286}{1859}$
    Respuesta: $\frac{2}{13}$

30. Reducir a su más simple expresión $\frac{1598}{1786}$
    Respuesta: $\frac{17}{19}$

31. Reducir a su más simple expresión $\dfrac{2535}{20280}$
Respuesta: $\dfrac{1}{8}$

32. Simplificar $4\dfrac{1}{31} + 1\dfrac{1}{62} + 1\dfrac{3}{93} + 4\dfrac{1}{4}$.
Respuesta: $10\dfrac{119}{372}$.

33. Simplificar $1\dfrac{1}{10} + 1\dfrac{1}{100} + 1\dfrac{1}{1000} + 1\dfrac{1}{10000}$.
Respuesta: $4\dfrac{1111}{10000}$.

34. Simplificar $3\dfrac{1}{100} + 2\dfrac{1}{45} + 4\dfrac{7}{60} + 1\dfrac{1}{800}$.
Respuesta: $10\dfrac{527}{3600}$.

35. Simplificar $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{30}\right) + \left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{50}\right)$
Respuesta: $1\dfrac{1}{30}$

36. Simplificar $\left(5\dfrac{1}{16} + 2\dfrac{1}{9} + 3\dfrac{1}{12}\right) + \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{3} + \dfrac{2}{15}\right)$
Respuesta: $13\dfrac{77}{180}$. Respuesta: $498\dfrac{3}{20}$.

37. Simplificar $\dfrac{1}{5} + \left(4\dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{60} + \dfrac{3}{80}\right)$

38. Simplificar $\left(20 - \dfrac{1}{10}\right) - \left(8 - \dfrac{1}{25}\right)$.
Respuesta: $11\dfrac{47}{50}$.

39. Simplificar $\left(\dfrac{7}{30} - \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{7}{5} - \dfrac{1}{20}.\right)$
Respuesta: $3\dfrac{29}{60}$.

40. Un hombre gana mensualmente 200 \$. Gasta $50\dfrac{3}{9}$ \$ en alimentación de su familia; 60 \$ en alquier y $18\dfrac{5}{8}$ \$ en otros gastos. ¿Cuánto puede ahorrar

mensualmente?

41. La cuarta parte del día la emplea un niño en estudiar; la sexta parte en hacer ejercicios y la novena en divertirse, ¿Qué parte del día le queda libre?
Respuesta: $\dfrac{17}{36}$.

42. Un hombre vende $\dfrac{1}{3}$ de su finca, alquila $\dfrac{1}{8}$ del resto y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca cultiva?
Respuesta: $\dfrac{7}{12}$.

43. Tres obreros tienen que tejer $200\,m$. de tela. Uno teje $53\dfrac{2}{7}\,m$. y otro $\dfrac{15}{34}\,m$. ¿Cuánto tiene que tejer el tercero?
Respuesta; $146\dfrac{65}{238}\,m$.

44. Simplificar: $\left(7\dfrac{2}{5}+5\dfrac{1}{6}\right)\times\left(28\dfrac{1}{4}+1\dfrac{3}{4}.\right)$
Respuesta: 377.

45. Simplificar: $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\times\left(\dfrac{1}{60}+\dfrac{10}{25}\right)\times 5\dfrac{4}{15}$.
Respuesta: $\dfrac{79}{270}$.

46. Simplificar: $\left(3\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}\right)\times\left(6-\dfrac{2}{3}\right)\times\left(5\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\right)$.
Respuesta: $103\dfrac{1}{9}$.

47. ¿Cuántos litros hay que sacar de un tonel de 560 litros para que queden en el los $\dfrac{6}{7}$ del contenido?
Respuesta: $80\,l$.

48. En un colegio hay 324 alumnos y el número de alumnas es los $\dfrac{7}{18}$ del total. ¿Cuántos varones hay?
Respuesta: 198.

49. De una finca de 20 hectáreas, se venden los $\dfrac{2}{5}$ y se alquilan los $\dfrac{3}{4}$ del resto. ¿Cuánto queda?
Respuesta: 3 hectáreas.

50. La distancia entre dos ciudades es de $140\,km$. ¿Cuántas horas debe andar un hombre que recorre los $\dfrac{3}{14}$ de dicha distancia en una hora, para ir de una ciudad a otra?
Respuesta: $4\dfrac{2}{3}\,h$.

51. Si una llave vierte $8\dfrac{1}{4}$ litros de agua por minuto, ¿Cuánto tiempo empleará en llenar un depósito de $90\dfrac{3}{4}$ litros de capacidad?
Respuesta: $11\,min$.

52. Si un kilogramo de frijoles cuesta los $\dfrac{3}{4}$ de uno de manteca. ¿con cuántos kilogramos de frijoles podré comprar 15 de manteca?
Respuesta: con 20.

53. Simplificar $\dfrac{\left(5\dfrac{7}{36} - 4\dfrac{1}{18} + 1\dfrac{1}{72}\right) \times 36}{78 - \dfrac{1}{2}}$.
Respuesta: 1

54. Simplificar $\dfrac{\left(9 \div \dfrac{1}{\frac{1}{3}} \times \dfrac{4}{5}\right) \times \dfrac{5}{12}}{6 \div \dfrac{1}{\frac{1}{2}}}$
respuesta: $\dfrac{1}{3}$

55. Una tubería vierte en un estanque 200 litros de agua en $\dfrac{3}{4}$ de hora y otra 300 litros en el mismo tiempo ¿Cuánto vierten las dos juntas en 2 horas?
respuesta: $1333\dfrac{1}{3}\,ls$.

56. He recibido 50 \$ después de haber gastado $\dfrac{2}{3}$ de lo que tenía al principio y tengo ahora 4 \$ más que al principio. ¿Cuánto tenía?
Respuesta: 69 \$

57. Una hacienda pertenece a tres propietarios. Al primero corresponden $\dfrac{5}{12}$; al segundo $\dfrac{1}{3}$, y al tercero $\dfrac{1}{4}$, Si se vende en 75000 bolivianos, ¿cuánto

corresponde a cada uno?
Respuesta: 1^{ro}, 31250; 2^{do}, 2500 y 3^{ro}, 18750 bolivianos.

58. Si se mueren $\frac{3}{5}$ de las palomas de un corral y se compran 2674 palomas, el número de las que habia al principio queda aumentado en $\frac{1}{3}$ de las que había al principio. ¿Cuántas palomas había al principio?
Respuesta: 2865.

59. Roberto es dueño de los $\frac{2}{7}$ de una hacienda, Carlos de $\frac{1}{9}$ y Hernan del resto. Si la hacienda se vende por 12600 \$. ¿cuánto recibe cada uno?
Respuesta: R. 3600 \$; C. 1400 \$; H. 7600 \$

60. Reparto cierta cantidad entre mis tres hermanos. Al mayor le doy $\frac{1}{7}$; al mediano $\frac{1}{8}$ y al menor el resto. Si al menor le he dado 34 \$ más que al mediano, ¿ cual fue la cantidad repartida y cuánto recibió cada uno?
Respuesta: 56 \$; may., 8 \$; med., 7 \$; menor., 41 \$

61. He gastado los $\frac{5}{6}$ de mi dinero. Si en lugar de gastar los $\frac{5}{6}$ hubiera gastado los $\frac{3}{4}$ de mi dinero, tendría ahora 18 \$ más de lo que tengo. ¿Cuánto gaste?
Respuesta: 180 \$

62. Se adquiere un libro por 4.50 \$; un par de zapatos por 2 \$ menos que el libro; una pluma fuente por la mitad de lo que costaron el libro y los zapatos. ¿Cuánto sobrará al comprador después de hacer estos pagos, si tenía 15.83 \$?
Respuesta: 5.33 \$

63. El agua contenida en cuatro depósitos pesa 879.002 kgs. el primer depósito contiene 18.132 kgs. menos que el segundo; 43.016 kgs. más que el tercero, y el tercero 78.15 kgs. más que el cuarto. Hallar el peso del agua contenida en cada deposito.
Respuesta: 1^{ro}, 247.197; 2^{do}, 265.329; 3^{ro}, 222.313; 4^{to}, 144.163 kgs.

64. El vino de un tonel pesa 1962 kgs. Si cada litro de vino pesa 0.981 kgs., ¿cuántos litros contiene el tonel?
Respuesta: 2000 l.

65. Roberto adquiere cierto número de libros por 46.68 \$ si hubiera comprado 4 más le habrian costado 77.80 \$. ¿Cuántos libros ha comprado y cuánto

ganará si cada libro lo vende por 9.63 $?
Respuesta: Compró 6; ganará 11.10 $.

66. La suma de los cuadrados de los dos números es 1186 y el número menor es 15. Hallar el número mayor.
Respuesta: 31.

67. Un terreno tiene $500\,m.$ de largo y 45 de ancho. Si se le diera forma cuadrada, ¿cuáles serían las dimensiones de este cuadrado?
Respuesta: $150\,m.$ de lado

68. Un comerciante compró cierto número de trajes y el precio que pagó por cada traje era la cuarta parte del número de trajes que compró. Si gastó 30976 bolivianos, ¿cuántos trajes compró y cuánto pago por cada uno?
Respuesta: 352 trajes; $88\,bs.$

69. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de $122\,m^2$ si su longitud es el doble del ancho?
Respuesta: $38\,m.\times 19\,m.$

70. Reducir $19\,m.^3$ a $mm.^3$ Respuesta: $19000000000\,mm.^3$

71. Reducir $76895.7345\,cm.^3$ a $km.^3$
Respuesta: $0{,}0000000000768957345,km.^3$

72. Reducir $123456.008\,m.^3$ a $Mm.^3$
Respuesta: $0.000000123456008,Mm.^3$

73. ¿Cuánto costará pavimentar un cuarto cuadrado de $4\,m.$ por $4\,m.$ con losas de $20\,cm.$ por $20\,cm.$ que se compran a 50 $ el millar?
Respuesta: 20 $.

74. A 500 bolivianos el millar de baldosa, Cuánto costará pavimentar una calle rectangular de $50\,m.$de largo y $8.50\,m.$ de ancho si cada baldosa cubre una superficie de $80\,cm.^2$?
Respuesta: 26562.50 bolivianos

75. Se empapelan las cuatro paredes de una sala rectangular de $15\,m.$ de largo, $8\,m.$ de ancho y $4\,m.$ de altura con piezas de papel de $368\,cm.^2$ cada una. ¿Cuántas piezas se necesitarán y cuánto importará la obra si cada pieza de papel vale 0.25 $?
Respuesta: 5000; 1250 $.

76. Una sala rectangular tiene 15 m. de largo, 6 m. de ancho y 5 m. de altura. La sala tiene cuatro ventanas de 1.50 m. por 2 m. ¿cuál es la superficie total de las cuatro paredes y cuántas piezas de papel de 44 cm. por 18 cm. harán falta para cubrir las paredes?
Respuesta: 198 m^2; 2500 piezas

1.5. RAZONES Y PROPORCIONES

1.5.1. Razón de dos números. Proporciones. Propiedades

1.5.2. Media Proporcional. Problemas sobre proporciones

1.5.3. Regla de tres simple y compuesta. Problemas

1.5.4. Tanto por ciento. Problemas

1.5.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un trabajo puede ser hecho por 13 personas en 28 días a razón de 6 horas diarias . Si 5 de ellas aumentaron su rendimiento en 20 %. ¿Cuánto tiempo tardaran si trabajan 8 horas diarias?

   A) 20 días B) 19 días 4 h. C) 19 días 12 h. D) 18 días 3 h. E) 17 días 5 h.
   Respuesta: C)

2. Un inspector Municipal llega a visitar 60 establecimientos en una semana invirtiendo 8 horas cada día. ¿Cuántos establecimientos podrán visitar 3 inspectores en 2 semanas si se emplean 6 horas al día'

   A) 135 B) 270 C) 540 D) 405 E) 315

   Respuesta: D)

3. Doce hombres se comprometen a hacer una obra en 8 días. Luego de trabajar 3 días juntos se retiran 3 hombres. ¿Cuántos días de retraso termina la obra terminan la obra ?

   A) $1\frac{1}{4}$ días B) $1\frac{2}{3}$ días C) $2\frac{1}{3}$ días D) 1 día E) 2 días
   Respuesta: B)

4. Una cabra sujeta a una estaca por medio de una cuerda de 3 metros demora media hora en comer el pasto que está a su alcance. ¿Cuánto demoraría si la cuerda fuese de 5 metros?

   A) 50 min. B) 18 min. C) 1 hora D) 1 h.23 min.20seg E) 1 h.25min.30 seg
   Respuesta: *B*)

5. Se sabe que 30 albañiles, trabajando 9 horas diarias, durante 18 días pueden construir 3 casas. ¿Cuántos albañiles podrán construir 4 casas, trabajando a un ritmo de 8 horas diarias durante 15 días? A) 24 B) 42 C) 40 D) 54 E) 72
   Respuesta: *B*)

6. En una construcción, 35 obreros cavan 4 zanjas en 72 horas. ¿En cuántas horas menos cavarán 3 zanjas, 45 obreros?.

   A) 42 B) 50 C) 52 D) 16 E) *Ninguno*

   Respuesta: *A*)

7. ¿Qué tanto por ciento de un número tiene por 18 % al 3 por 5 de 30 es el 50 % de otro número, tiene por 66,6 % al 15 por 6 del 4 por 7 de 56?.

   % A)25 % B) 20 % C) 30 % D) 30 % E) 40 %

8. Al ser tostado, el café pierde el 20 % de su peso. Un tendero vende cafe tostado aS/. 11,5 el kg ganado el 15 %. Calcule a que precio se ha comprado el kg de cafe sin tostar.

   A)*S*/. B) *S*/,10 C) *S*/,8 D) *S*/,7 E) *S*/,12
   G × R

9. un comerciante compro una partida de un género y vendió la mitad ganado el 15 % sobre el precio de compra; después vendió una cuarta parte del resto perdiendo el 10 % sobre el precio de venta. Estas dos ventas le han dado una ganancia de 3475 soles menos soles menos que el costo del género sobrante. ¿ Cuánto pago el comerciante por el género?
   Respuesta: $ 11 160, 59

10. A un contratista le cuesta 48 soles el metro cubico de piedra en bruto, la que después de ser triturada, se reduce a un tercio del volumen. Para que la trituren paga 60 soles por metro cúbico de piedra . Si ha ganado un 30 % en el contrato,¿Cuánto recibió por metro cúbico de piedra triturada?
Respuesta: $171,60$ soles

11. Habiendo comprado un comerciante una pieza de tela, vende al por menor los $\frac{5}{8}$ de la misma con un beneficio de 60 soles por metro y el resto 40soles de beneficio. La la ganancia total es de 6300 soles , que representa el 15 % del precio. ¿Cuál es la longitud de la pieza y el precio de compra?

    Respuesta: $L = 120\,m$ costo $=$ 42000 soles

12. Un ingeniero recarga el precio de una casa el 25 % de su valor; si al venderla descuenta el 12 % a un comprador. Digase cuál ha sido el tanto por ciento de utilidad.
Respuesta: 10 %

13. se vendió un radio en 12,60 soles, ganando el 14 % del precio de compra más 5 % del precio de venta. ¿Cuáto costó el radio?
Respuesta: \$ $10,50$

14. Si: $\dfrac{3a^2-b^2}{8a^2-2b^2} = \dfrac{3}{14}$. Hallar $\dfrac{a+b}{5a-3b}$

    A) 8 B) 9 C) 3 D) 4 E) 5

15. Si: $\dfrac{3a^2-b^2}{a^4-b^4} = \dfrac{1}{3026}$. Sabiendo que la media proporcional de a y b es 35. Hallar $a+b$.

    A) 74 B) 75 C) 76 D) 77 E) 78

16. En $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Se cumple que: $a^3 + d^3 = 65$ y $ad(a+c) = 20$. Hallar bc

    A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17. La suma y el producto de los 4 términos de una proporción continua son respectivamente 192 y $194,481$. Calcular la diferencia de los extremos.

A) 75 B) 150 C) 104 D) 80 E) 144

18. Calcular la media proporcional entre "a" "b" sabiendo que "a" es la cuarta proporcional de $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$ y "b" es la tercia proporcional de $\frac{1}{5}$ 6.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

19. Al quitar 18 a cada uno de los números la razón entre los mismos sería como 5 es a 7. Si la razón inicial de los mismos era como 7 es a 9. Hallar el número mayor. A) 63 B) 72 C) 81 D) 90 E) 108

20. Si $\frac{a}{80} = \frac{80}{c}$. Hallar c si: $\frac{a}{80} = \frac{70}{c-5}$

A) 20 B) 30 C) 40 D) 80 E) 60

21. La suma de dos números es a su diferencia como 6 es a 1. Si el producto de los dos números es 5040. Indicar la diferencia de los mismos.

A) 20 B) 16 C) 24 D) 12 E) 8

22. La razón de 2 números se eleva al cuadrado. Si a sus términos se le disminuye en tres unidades calcule la diferencia de dichos números.

A)4 B) 8 C) 12 D) 9 E) 7

23. Calcule en qué relación se encuentran dos cantidades sabiendo que la razón geométrica de tal raíz cuadrada del producto de dichas cantidades y la semisuma de dichas cantidades es como 7 a 25.

A)3 es 4 B) 7es A 1 C)13 es a 26 D) 49 es a 1 E) 25 es a 9

24. Para 4 números a, b, c y d, además:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{40}{bc}$
calcule $(d-a)_{min}$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 12

25. De una serie de 3 tres razones geométricas equivalente la suma de los cuadrados de los anteriores y la suma de los cuadrados de los consecuentes esta en la relación como 81 es a 121. Si el producto de los dos últimos antecedente es 162,calcule la menor diferencia entre el menor de los consecuentes sabiendo que el primer consecuente tiene 3 divisores.

   A) 90 B) 70 C) 120 D) 130 E) 110

26. Dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ¿que afirmación son verdaderas?

   I. $\dfrac{(a-b)^4}{(c-d)^4} = \dfrac{a^4+b^4}{c^4+d^4}$

   II. $\dfrac{ab}{cd} = \dfrac{(a+b)}{(c+d)^4}$

   $\dfrac{a^n+b^n}{a^n-b^n} = \dfrac{c^n+d^n}{c^n-d^n}$

27. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{d}{e}$ y la diferencia entre el último consecuente y el primer antecedente es 480 y la suma de las 4 razones es $\dfrac{4}{3}$. Hallar $b+c+d$.

   A) 396 B) 156 C) 224 D) 386 E) 234

   Respuesta: *E*)

28. En: $\dfrac{A}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{A} = k$. Hallar: $E = \dfrac{2A^3+3b^3}{4a^3}$

   A) $\dfrac{7}{6}$ B) $\dfrac{6}{5}$ C) $\dfrac{5}{4}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{3}{2}$

   Respuesta: *C*)

29. Los cuadrados de $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{1}{8}$ son proporcionales a otros 3 números que suman $\dfrac{147}{576}$. Uno de los números será:

   A) $\dfrac{5}{44}$ B) $\dfrac{7}{144}$ C) $\dfrac{8}{21}$ D) $\dfrac{7}{176}$ E) $\dfrac{7}{12}$

   Respuesta: *B*)

30. S tiene la siguiente serie: $\dfrac{72}{a} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{7} = \dfrac{84}{d}$. Se sabe que: $a+b+c+d091$. Hallar $c-d$

A) 4 B) 7 C) 3 D) 6 E) 8
Respuesta: $C)$

31. En una serie de razones geométricas iguales de razón 3, los antecedentes son 3 números consecutivos. Hallar la suma de los consecuentes, sabiendo que su producto es 18,960.

    A) 15 B) 80 C) 7,5 D) 46 E) $Ninguno$

    Respuesta: $B)$

32. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que los números $5, 3$ y 40. Hallar el mayor.

    A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 100
    Respuesta: $A)$

33. La relación entre dos números es de 5 a 2. Hallar los números sabiendo que su suma es 49.
    Respuesta: 35 y 14.

34. La razón de dos números es $\frac{8}{3}$ y su diferencia 55. Hallar los números.
    Respuesta: 88 y 33.

35. $\frac{5}{c} = \frac{4}{d} = \frac{6}{e}$. Sabiendo que $c + d + e = 120$, hallar c, d y e.
    Respuesta: $c = 40$, $d = 32$, $e = 48$.

36. Tres números cuya suma es 240 guardan entre si la relación de los números 2, 3 y 5. Hallar los números.
    Respuesta: 48, 72, y 120.

37. Una torre de 25.05 da una sombra de 33.40 m. ¿Cuál será ,a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1.80 m.?
    Respuesta: 2.40 m.

38. Una cuadrilla de obreros emplea 14 días, trabajando 8 horas diarias, en realizar cierta obra. Si hubiera trabajado una hora menos al día, ¿en cuántos días habrían terminado la obra?
    Respuesta: 16 días.

39. A la velocidad de $30\,km.$ por hora un automóvil emplea $8\frac{1}{4}$ horas en ir de una ciudad a otra. ¿ Cuánto tiempo menos se hubiera tardado si la velocidad hubiera sido triple?
Respuesta: $5\frac{1}{2}\,h.$ menos.

40. Dos piezas de paño de la misma calidad cuestan, una $450\,bs.$ y otra $300\,bs.$ Si la primera tiene $15\,m.$ más que la segunda, ¿cuál es la longitud de cada pieza?
Respuesta: $45\,m.$; $30\,m.$

41. Una guarnición de 1300 hombres tiene víveres par cuatro meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más; ¿cuántos hombres habrá que rebajar de la guarnición?
Respuesta: 100 hombres.

42. Una guarnición de 500 hombres tiene víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias tomará cada hombre si se quiere que los víveres duren 5 días más?
Respuesta: $2\frac{2}{5}$ raciones diarias.

43. Una calle de $50\,m.$ de largo y $8\,m.$ de ancho se halla pavimentada con 20000 baldosas ¿Cuántos baldosas serán necesarios para pavimentar otra calle de doble largo y cuyo ancho es los $\frac{3}{4}$ del ancho anterior?
Respuesta: 30000 baldosas

44. Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 días cierta obra. Al cabo de 9 días sólo han hecho los $\frac{3}{7}$ de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar la obra en el tiempo fijado?

45. Una pared de $5\,m.$ de largo. $1\,m.$ de alto y $0.07\,m.$de espesor ha costado $25\,\$$. ¿Cuál será el espesor de otra pared de $14\,m.$ de largo y $0.70\,m.$ de alto, por la cual se pagan $490\,\$$?
Respuesta: $0.7\,m.$

46. 30 hombres se comprometen a hacer una obra en 15 días. Al cabo de 9 días solo han hecho los $\frac{3}{11}$ de la obra. Si el capataz refuerza la cuadrilla con 42 hombres, ¿podrán terminar la obra en el tiempo fijado o no, y si

no es posible, cuántos días más necesitarán?

47. 10 hombres se comprometieron a realizar en 24 días cierta obra. Trabajaron 6 días a razón de 8 horas diarias. Entonces se pidió que acabaran la obra 8 días antes del plazo que se les dio al principio. Se colocaron más obreros, trabajaron todos 12 horas diarias y terminaron la obra en el plazo pedido.¿Cuántos obreros se aumentaron?
Respuesta: 2 obreros.

48. Un capataz contrata una obra que debe comenzarla el día 1 de junio y terminarla el 5 de julio. El día 1 de junio pone a trabajar 20 hombres, los cuales trabajan hasta el día 14 inclusive a razón de 6 horas diarias. Ese día el propietario le dice que necesita la obra terminada el día 24 de junio. Entonces, a partir del día 15, coloca más obreros, se trabajan 9 horas diarias en vez de 6 y logra complacer al propietario. ¿Cuántos obreros aumentó el capataz a partir del día 15?
Respuesta: 8 obreros.

49. Si me rebajan el sueldo en un 20 % quedo ganando 1040 bolivianos mensuales. ¿ Cuánto gano ahora?
Respuesta: 1300 bolivianos.

50. ¿Qué número aumento en su 32 % equivale a 792?
Respuesta: 600.

51. 16. ¿A cómo hay que vender lo que ha costado 2.10 $ para ganar el 30 % del cosó?
Respuesta: 2.73 $.

52. Un comerciante compra artículos con un descuento del 25 % del precio de lista y los vende a un 25 % más que el precio de lista. ¿Cuál es su % de ganancia sobre el costo?
Respuesta: $66\frac{2}{3}\,\%$

53. Se compran artículos a un 10 % menos que el precio de catálogo y se venden un 10 % más que el precio de catálogo. ¿Qué % del costo se gana?
Respuesta: $22\frac{2}{9}\,\%$.

54. No quise vender una casita cuando me ofrecían por ella 3840 $, con lo cual hubiera ganado el 28 % del costo y algún tiempo después tuve que

venderla por 3750 \$. ¿Qué % del costo gané al hacer la venta?
Respuesta: 25 %.

55. Dividir 225 en dos partes que sean entre si como 7 es a 8.
Respuesta: 105 y 120.

56. Dividir 60 en 3 partes tales que la 1^{ra} sea a la 2^{da} como 2 es a 3 y la 2^{da} a la 3^{ra} como 1 es a 5.
Respuesta: 1^{ra}, 6; 2^{da}, 9; 3^{ra}, 45.

57. Un campesino tiene 275 aves entre gallos, gallinas y palomas. El número de gallinas es al de gallos como 7 es a 3 y el número de palomas es al de gallinas como 5 es a 2. ¿Cuántas aves de cada especie tiene?
Respuesta: 70 gallinas; 30 gallos; 175 palomas.

58. Dividir 56 en cuatro partes tales que la 1^{ra} sea a la 2^{da} como 2 es a 3; la 2^{da} a la 3^{ra} como 3 es a 4 y la 3^{ra} a la 4^{ta} como 4 es a 5.
Respuesta: 1^{ra}, 8; 2^{da}, 12; 3^{ra}, 16; 4^{ta}, 20.

59. Si tengo alcohol de 40^o, 35^o, 30^o y 25^o, ¿qué cantidad de cada graduación necesitaré para preparar 5 litros de 33^o?
de 40^o para que la mezcla resulte de 30^o
Respuesta: $1\,l$.

60. Con alcohol de 40^o, 30^o y 20^o se quieren obtener 60 litros de alcohol de 25^o. Si en la mezcla han de entrar 10 litros de 40^o, ¿cuántos litros habrá que poner de los otros ingredientes?
Respuesta: $40\,ls.$ de 20^o y $10\,ls.$ de 30^o.

61. ¿A cómo debo vender el litro de una mezcla de $30\,ls.$ de vino de $60\,bs.$ y $20\,ls.$ de agua para ganar $8\,bs.$ por litro?

62. Para obtener alcohol de 60^o, ¿qué cantidades serán necesarias de alcohol de 70^o y 30^o?
Respuesta: $30\,ls.$ de 70^o y $10\,ls.$ de 30^o para $40\,ls.$ de la mezcla.

Capítulo 2

ÁLGEBRA TEORÍA-EJEMPLOS

2.1. introducción

El álgebra esencialmente es una generalización de la Aritmètica en el sentido que los objetos que se manejan (denominados expresiones algebraicas) representan no a números concretos y específicos, sino a un conjunto amplio de números; por ejemplo $(a+b)^2$ representa al conjunto de números que se obtienen sumando dos números cualesquiera y multiplicando dicha suma por sí misma.

El álgebra ha recorrido en su evolución desde la denominación de los objetos (con los que trabaja) empleando el lenguaje cotidiano usual, pasando por una simbología resultante de la simplificación de vocablos cotidianos hasta lograr el uso de símbolos apropiados y eficientes que aparecen en su forma actual.

El problema central del álgebra es la búsqueda de cantidades que tengan o cumplan determinadas condiciones; este problema se conoce como resolución de ecuaciones. El álgebra permite la representación mediante símbolos de las cantidades buscadas y permite la traducción simbólica de las condiciones o relaciones cuantitativas que deben cumplir dichas cantidades. El resultado es la construcción de un sistema de ecuaciones. Por otra parte, el álgebra ha desarrollado un conjunto de resultados que se conocen como identidades; las que permiten expresar las expresiones algebraicas de diferentes maneras. Y es el empleo apropiado de dichas identidades o igualdades que permiten la resolución de las ecuaciones.

Un primer objetivo del álgebra es manejar las diferentes identidades algebraicas, donde este dominio requiere de un buen manejo aritmético; por lo que es importante considerar importante que la base de un buen aprendizaje en álgebra está basado en un buen aprendizaje de la Aritmética.

El segundo objetivo, el principal, del ágebra es la traducción en términos de ecuaciones de las relaciones existentes entre diferentes cantidades establecidas com información o conjunto de datos del problema que son las que determinan la solución o determinación de valores desconocidos conocidos como incógnitas.

Finalmente, el ágebra provee diferentes procedimientos o algoritmos de resolución de las ecuaciones y contiene resultados relativos a la existencia y cantidad de soluciones a un problema.

2.2. Algebra

Expresión Algebraica.- Es el conjunto de números y letras unidas entre si por los signos de operación, como la suma, la resta, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.

$$4x^3 - 3y^2 + 7z^2, \ \frac{5x^5 + 8\sqrt{x^2 - 7xy^4} + 6z}{3x^2y - 3xy}$$

no son expresiones algebraicas; $\cos x, \tan x$, etc.

Término Algebraico.- Es la expresión algebraica cuyas partes no están separadas ni por el signo más ni por el signo menos, solo contiene productos y cocientes de números y de letras. Otra definición es un monomio separado de otro por el signo más o por el signo menos.

Ejemplo 2.1

$$5x^2, \ 7y^3z^4, \ -4x^4y^5z^9$$

Partes de un Término Algebraico.- Todo término algebraico presenta las siguientes partes: Coeficientes, parte literal, exponente.

$$(-5)x^7$$

(-5) es el coeficiente; x es parte literal y 4 el exponente.

2.2.1. Teoría de Exponentes

La teoría de exponentes tiene el objeto estudiar todas las clases de exponentes que existen y las relaciones que se dan entre ellos.
La operación que permite la presencia del exponente es la potenciación, la cual se define así:
Potenciación Es la operación que consiste en repetir un número llamado base tantas veces como factor, como lo indica otro llamado exponente, al resultado de esta operación se le denomina potencia, esto es:

$$\text{Potencia} = (\text{base})^{\text{exponente}}$$

Ejemplo 2.2

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$$

Ejemplo 2.3

$$4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$$

De forma general se tiene

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a \times a}_{\text{n veces } a}$$

2.2.2. Propiedades de los exponentes

Multiplicación de Potencias de Bases Iguales.- Para esto se escribe la misma base, y como exponente se escribe la suma de los exponentes, esto es:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 2.4

$$x^6 \cdot x^9 = x^{6+9} = x^{15}, \qquad x^3 \cdot x^5 \cdot x^{-3} \cdot x^{12} = x^{3+5-3+12} = x^{17}$$

División de Potencias de Bases Iguales:- En este caso se escribe la misma base, y como exponente se escribe la diferencia de los exponentes. Esto es:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 2.5

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3 = 8, \qquad \frac{x^9}{x^{12}} = x^{9-12} = x^{-3}, \qquad \frac{x^{m+1}}{x^{m-3}} = x^{(m+1)-(m-3)} = x^4$$

Exponente Cero.- Toda cantidad diferente de cero, con exponente cero, es igual a la unidad. Esto es:

$$a^0 = 1, \ a \neq 0$$

Exponente Negativo

Toda cantidad diferente de cero, elevada a un exponente negativo, es igual a una fracción cuyo numerador es 1 y cuyo denominador es igual a la misma expresión pero con exponente hecho positivo. Esto es:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a \neq 0$$

Ejemplo 2.6

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}, \qquad x^{-8} = \frac{1}{x^8}, \qquad \frac{a^3}{b^5} = a^3 b^{-5}$$

Potencia de un producto

Para efectuar se eleva cada factor a dicha potencia. Esto es

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Observación : En lugar de escribir $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ se escribe de forma abreviada así $(a \cdot b)^n = (ab)^n$ y $a^n \cdot b^n = a^n b^n$

Ejemplo 2.7

$$(a \cdot b)^7 = a^7 \cdot b^7 \,, \qquad x^9 y^9 = (xy)^9 \,, \qquad \frac{5^x \cdot 7^x}{35^x} = \frac{(5 \cdot 7)^x}{35^x} = 1$$

Potencia de un Cociente

Para efectuar se eleva tanto el numerador como el denominador a dicha potencia. Esto es:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 2.8

$$\left(\frac{x}{y}\right)^7 = \frac{x^7}{y^7} \qquad\qquad \frac{12^m}{4^m} = \left(\frac{12}{4}\right)^m = 3^m$$

Potencia negativa de un Cociente

Para efectuar, se invierte el cociente y la potencia se transforma en positiva y se procede como en el caso anterior. Esto es.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

Ejemplo 2.9

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3}$$

Potencia de Potencia

Para realizar está operación se escribe la misma base y se eleva a un exponente igual al producto de los exponentes. Esto es.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ejemplo 2.10

$$(x^5)^4 = x^{(5)(4)} = x^{20} \qquad\qquad 9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$$

Raíz de una Potencia

Para extraer la raíz de una potencia se escribe la misma base y como exponente, la división del exponente de la potencia entre el índice del radical. Esto es.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

Ejemplo 2.11 Extraer $\sqrt{x^8} = x^{\frac{8}{2}} = x^4$

Ejemplo 2.12 Extraer $\sqrt[5]{x^{15}} = x^{\frac{15}{5}} = x^3$

Ejemplo 2.13 Extraer $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{24}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{24}{4}}} = \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^3$

Exponente Fraccionario

Toda cantidad elevada a un exponente fraccionario es igual a una raíz cuyo índice es igual al denominador del exponente fraccionario y cuya cantidad subradical es la misma cantidad elevada a un exponente igual al numerador del exponente fraccionario. Esto es.

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Ejemplo 2.14

$$512^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{512^2} = (\sqrt[3]{512}\,)^2 = 8^2 = 64$$

Exponente Fraccionario Negativo

Toda cantidad elevada a un exponente fraccionario negativo es igual a una fracción cuyo numerador es igual a la unidad, y cuyo denominador es igual al exponente fraccionario pero hecho positivo

$$a^{-\frac{p}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{n}}}$$

Ejemplo 2.15 *Efectuar* $9^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[2]{9})^3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

Raíz de un Producto

Para efectuar se escribe la raíz de cada factor. Así

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\ \text{, donde } a \geq 0 \quad b \geq 0$$

Ejemplo 2.16

$$\sqrt[4]{(2^8)(3^4)} = \sqrt[4]{2^8}\,\sqrt[4]{3^4} = (2^2)(3) = 12$$
$$\sqrt[7]{x^{21}y^{14}} = \sqrt[7]{x^{21}}\,\sqrt[7]{y^{14}} = x^{\frac{21}{7}}y^{\frac{14}{7}} = x^3y^2$$

2.2.3. Leyes de los Signos

Multiplicación

Producto de dos términos de signos iguales es positivo y de signos diferentes es negativo. Esto es

$$(+)(+) = (+), \quad (-)(-) = (+), \quad (-)(+) = (-), \quad (+)(-) = (-)$$

División

Dos términos de signos iguales, divididos dan por resultado un término con signo positivo y en el caso de signos diferentes, dan por resultado un término de signo negativo, esto es

$$a)\ \frac{(+)}{(+)} = (+) \quad b)\ \frac{(-)}{(-)} = (+) \quad c)\ \frac{(-)}{(+)} = (-) \quad d)\ \frac{(+)}{(-)} = (-)$$

Potenciación

Potencias positivas de índice par o impar dan siempre resultado positivo. Potencias negativas de índice par dan resultado positivo y de índice impar dan resultado negativo. Así

$(+)^{\text{par}} = (+)\,,\ (+)^{\text{impar}} = (+)\,,\ (-)^{\text{par}} = (+)\,,\ (+)^{\text{impar}} = (-)$

Radicación

Raíces de índice par de cantidades: $a)$ Positivas o $b)$ negativas tiene igual signo que su cantidad subradical raíces de índice par de cantidades: $c)$ positivas tienen doble signo, positivo y negativo. Raíces de índice par de cantidades negativas no existen en el campo real son cantidades imaginarias

$$\sqrt[impar]{(+)} = (+), \quad \sqrt[impar]{(-)} = (-), \quad \sqrt[par]{(+)} = (+), \quad \sqrt[par]{(-)} = (imaginario)$$

2.2.4. Ejercicios Ilustrativos

Ejemplo 2.17 *Efectuar* $E = (2x^2)(3x^3y^2)(x^2y)^2$

Solución

En la solución, de este ejercicio, se utiliza la propiedad:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

En efecto, se tiene;

$$E = 6(x^2x^3x^{(2)(2)}y^2y^2) = 6(x^{2+3+4}y^{2+2}) = 6(x^9y^4)$$

Ejemplo 2.18 *Efectuar*

$$E = \frac{(3^{m+n})(3^{m-n})(3^{m+4})}{(3^{2m+1})(3^{m-2})}$$

Solución Utilizamos la propiedad:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{3^{(m+n)+(m-n)+(m+4)}}{3^{(2m+1)+(m-2)}} = \frac{3^{m+n+m-n+m+4}}{3^{2m+1+m-2}} = \frac{3^{3m+4}}{3^{3m-1}} \\ &= 3^{(3m+4)-(3m-1)} = 3^5 = 243 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.19 *Calcular el valor de la expresión*

$$E = \frac{(2^{m+3})(7^{2m+1}) - (2^{m+1})(7^{2m})}{(2^{m+5})(7^{2m}) - (2^{m+1})(7^{2m+1})}$$

a) 1 *b)* 2^m *c)* 7^m *d)* 2 *e)* 3

Solución: En la solución, de este ejercicio, utilizamos una de las propiedades:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

En efecto, se tiene:

$$E = \frac{(2^m 2^3)(7^{2m} 7^1) - (2^{2m} 2^1)(7^{2m})}{(2^m 2^5)(7^{2m}) - (2^{2m} 2^1)(7^{2m} 7^1)}$$

Extrayendo factor común en el denominador.

$$E = \frac{(2^m)(7^{2m})[(2^3)(7^1) - 2^1]}{(2^m)(7^{2m})[2^5 - (2)(7)]}$$

Simplificando y efectuando operaciones

$$E = \frac{56 - 2}{32 - 14} = 3 \qquad \therefore E = 3 \quad \text{Respuesta } e)$$

Ejemplo 2.20 *Determinar el valor de la expresión*

$$E = \left\{ \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \right\}^{-1} \left\{ \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} b^{-2}} \right\}$$

a) a^2 *b)* b^2 *c)* a^2b^2 *d)* 1 *e)* ab

***Solución*:** En este ejercicio, se utilizara las propiedades:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)n$$

Utilizando lo anterior;

$$E = \left\{\frac{\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}}{\frac{b+a}{ab}}\right\}^{-1} \left\{\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{1}{a^2b^2}}\right\}$$

Simplificando las fracciones

$$E = \left\{\frac{ab(b^2 - a^2)}{a^2b^2(b+a)}\right\}^{-1} \left\{\frac{a^2b^2(b-a)}{ab}\right\}$$

Efectuando operaciones:

$$E = \left\{\frac{(b+a)(b-a)}{ab(b+a)}\right\}^{-1} \{ab(b-a)\}$$

Utilizando la otra propiedad

$$E = \left\{\frac{ab}{(b-a)}\right\} \{ab(b-a)\}$$

Efectuando se obtiene

$$E = a^2b^2 \qquad \text{Respuesta E}=a^2b^2$$

Ejemplo 2.21 *Calcular el valor de:* $E = \dfrac{21^6 * 35^3 * 80^3}{15^4 * 14^9 * 30^2}$

a) 3 *b)* 5 *c)* -3 *d)* 2 *e)* 1

***Solución*:** Descomponiendo en factores primos, para aplicar potencia de potencia $(ab)^n = a^nb^n$

$$E = \frac{(3*7)^6 * (7*5)^3 * (2^4 * 5)^3}{(3*5)^4 * (2*7)^9 * (2*3*5)^2}$$

aplicando potencia de potencia

$$\frac{3^6 * 7^6 * 7^3 * 5^3 * 2^{12} * 5^3}{3^4 * 5^4 * 2^9 * 7^9 * 2^2 * 3^2 * 5^2}$$

aplicando propiedad, para luego simplificar:

$$E = \frac{3^6 * 7^9 * 5^6 * 2^{12}}{3^6 * 5^6 * 2^{11} * 7^9} = 2^1 = 2 \qquad \text{Respuesta: 2}$$

Ejemplo 2.22 *Calcular el valor de*

$$E = \frac{2^{x+4} + 36(2^{x-2})}{2^{x+5} - 2(2^{x+3}) - 4(2^{x+1}) - 6(2^{x-1})}$$

a) 5 *b)* -3 *c)* -1 *d)* 2 *e)* -5

Solución: Por la teoría de los exponentes: $a^{m+n} = a^m a^n, \ a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$

$$\begin{aligned} E &= \frac{2^x 2^4 + 36(2^x 2^{-2})}{2^x 2^5 - 2(2^x 2^3) - 4(2^x 2^1) - 6(2^x 2^{-1})} \\ &= \frac{(16)(2^x) + 36\left(\dfrac{2^x}{2^2}\right)}{(32)(2^x) - (16)(2^x) - (8)(2^x) - 6\left(\dfrac{2^x}{2^1}\right)} \\ &= \frac{(16)(2^x) + (9)(2^x)}{(32)(2^x) - (16)(2^x) - (8)(2^x) - (3)(2^x)} \\ &= \frac{(25)(2^x)}{(5)(2^x)} = 5 \qquad \text{Respuesta: 5} \end{aligned}$$

2.2.5. Ecuaciones Exponenciales

Son igualdades relativas cuyas incógnitas aparecen como exponentes. Se entiende por igualdad relativa a aquella que se verifica para algunos valores que se le asigne a sus incógnitas

Ejemplos

$$a)\ 2^x = 100 \qquad b)\ 2^{3^{8^x}} = 512 \quad c)\ [A^{4^x}]^{2-x} = B^{16^{45}}$$

2.2.6. Solución de una ecuación Exponencial

Es el valor o valores que verifican la igualdad relativa.

$$3^x = 81, \ x = 4, \ 3^4 = 81$$

$$2^x = 32, \ x = 5, \ 2^5 = 32$$

para obtener la solución se debe tener en cuenta:

Primer caso

1. Las bases de las potencias deben ser iguales.

2. Para que haya igualdad los exponentes de las potencias, como consecuencia, deben ser iguales, esto es:

$$\text{Si } A^m = A^n \text{ entonces } m = n$$

Segundo caso

1. Los exponentes de las potencias deben ser iguales.
2. Para que haya igualdad las bases de las potencias, como consecuencia, deben ser iguales, esto es:

$$\text{Si } A^m = B^m \text{ entonces } A = B$$

Ejemplo 2.23 *Resolver la ecuación exponencial*

$$27^{9^{3-x}} = \sqrt[3]{3}$$

$a)$ 2 $\quad b)$ 4 $\quad c)$ 6 $\quad d)$ 8 $\quad e)$ 5

***Solución*:** Igualando las bases de las potencias, para lo cual se escoge la base 3

$$(3^3)^{9^{3-x}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

Efectuando operaciones, se tendrá

$$3^{(3)(9^{3-x})} = 3^{\frac{1}{3}}$$

Igualando los exponentes

$$3 * 9^{3-x} = \frac{1}{3}$$

Igualando a la base común 3

$$3 * (3^2)^{3-x} = 3^{-1}$$

Efectuando

$$3^1 * 3^{6-2x} = 3^{-1}$$

$$3^{1+6-2x} = 3^{-1}$$

Igualando bases

$$\begin{aligned} 7 - 2x &= -1 \\ 7 + 1 &= 2x \\ 8 &= 2x \\ 4 &= x \qquad \text{Respuesta: } x = 4 \end{aligned}$$

Observación : $3 \cdot 9^{3-x} = 3 * 9^{3-x} = (3)(9^{3-x})$

2.2.7. Ejemplos Ilustrativos

Ejemplo 2.24 *Resolver* $5^{3^{x-5}} = 125^{9^{x+4}}$ *es :*

$$a)\ -14 \qquad b)\ 14 \qquad c)\ -13 \qquad d)\ 4 \qquad e)\ -4$$

***Solución*:** Expresando en base 5

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Potencia de potencia} & 5^{3^{x-5}} & = & 5^{(3)(9^{x+4})} \\
\text{Bases iguales} & 3^{x-5} & = & (3)(9^{x+4}) \\
\text{Expresando como potencia de 3} & 3^{x-5} & = & (3)(3^2)^{x+4} \\
\text{Potencia de potencia:} & 3^{x-5} & = & (3)(3^{2x+8}) \\
 & 3^{x-5} & = & 3^{2x+9} \\
\text{bases iguales} & x-5 & = & 2x+9 \\
 & x & = & -14
\end{array}$$

Respuesta: $x = -14$

Ejemplo 2.25 *Resolver la ecuación exponencial.*

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}}$$

$$a)\ 1 \qquad b)\ -1 \qquad c)\ \frac{1}{2} \qquad d)\ 2 \qquad e)\ \text{ninguno}$$

Solución : Aplicando multiplicación de potencias de bases iguales

$$4^x 4^{\frac{1}{2}} - 3^x 3^{-\frac{1}{2}} = 3^x 3^{\frac{1}{2}}$$

efectuando, exponente negativo

$$4^x \sqrt{4} - 3^x \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^x \sqrt{3}$$

$$4^x 2 - 3^x \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^x \sqrt{3}$$

común denominador

$$\begin{aligned}
4^x 2\sqrt{3} - 3^x &= 3^x\sqrt{3}\sqrt{3} \\
4^x 2\sqrt{3} - 3^x &= 3^x 3 \\
4^x 2\sqrt{3} &= (4)(3^x) \\
\frac{4^x}{3^x} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\
\frac{4^x}{3^x} &= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \\
\left(\frac{4}{3}\right)^x &= \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\text{bases iguales} & \\
x &= \frac{1}{2} \\
\text{Respuesta}: x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.3. Expresiones Algebraicas

2.3.1. Grado de una expresión Algebraica

Grado de una expresión algebraica es una característica relacionada con el exponente de sus letras, el cual debe ser un número entero y positivo y permite determinar el número de sus soluciones de una ecuación. Puede ser de dos tipos, relativo y absoluto.

Grado Relativo.- Se refiere a una sola letra.

Grado Absoluto.- Se refiere a todas las letras

Grados de un monomio

Monomio.- Es la mínima expresión algebraica que posee tiene un solo término algebraico

Ejemplo 2.26

$$5xy^4, -3xyz^2, \frac{8x}{y}$$

Binomio.- Es una expresión algebraica de dos términos

Ejemplo 2.27

$$5x + 6y,\ 7x^5 - 7xyz^3$$

Trinomio.- Es una expresión algebraica de tres términos

Ejemplo 2.28

$$-5x + 5x + 6y,\ 8x - 7x^5 - 7xyz^3,\ x^4 - 12xy + \frac{xy}{2z^2}$$

Grados de un Monomio

Grado absoluto (G.A.).- El grado absoluto de un monomio está dado por la suma de los exponentes de todas sus letras.
Grado Relativo.- Está dado por el exponente de la letra referida a dicho monomio.

Ejemplo 2.29 *Dado* $E = 5^9x^3y^4w^7$ *entonces*

(a) *G.A.M.=3+4+7=14*

$$(b)\ G.R.M. = \begin{cases} G.R.(x) = 3 & \text{con respecto a } x \\ G.R.(y) = 4 & \text{con respecto a } y \\ G.R.(w) = 7 & \text{con respecto a } w \end{cases}$$

2.3.2. Polinomio

Es una expresión algebraica que tiene dos o mas términos algebraicos, recibe el nombre de binomio cuando tiene dos términos; trinomio cuando tiene 3 términos. Un polinomio en la variable x se representa de la siguiente manera

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$

Grados de un Polinomio

Se llama grado de una expresión algebraica racional entera, a una característica relacionada con los exponentes se sus letras.
Grado absoluto de un polinomio
G.A.P. : Está dado por él término que tiene mayor grado absoluto.
Grado Relativo de un polinomio
G.R.P. : Está dado por el término de mayor exponente de la letra del polinomio.

Ejemplo 2.30 *Determinar los grados del polinomio.*

$$P(x) = 6x^3y^5z^3 + 8x^2y^5z + 7x^6yz^9$$

Solución.-

1. Se tiene

   a) Grado absoluto de $6x^3y^5z^3 \ldots$ es 11

   b) Grado absoluto de $8x^2y^5z \ldots$ es 8

   c) Grado absoluto de $7x^6yz^9 \ldots$ es 16

   Luego el grado absoluto del polinomio es el mayor, esto es: 16.

1. Grado Relativo $G.R.(x) = 6$

2. Grado Relativo $G.R.(y) = 5$

3. Grado Relativo $G.R.(z) = 9$

Notación.- La representación de un polinomio es mediante sus variables y constantes.

$$P(x, y, z) = a^3 + by^6 + cz^9$$

donde.
P : nombre genérico
x, y, z: Variables
a, b, c: Constantes

2.3.3. Clasificación

Los polinomios se clasifican en:

Polinomio ordenado

Son aquellos polinomios dispuestos en forma descendente o ascendente, esto es por que los valores de los exponentes de la letra considerada es ascendente o descendente

Ejemplo 2.31 *Dado el polinomio*

$$P(x, y) = x^4y^9 - 6x^7y^8 + 9x^{10}y^5$$

El polinomio es creciente respecto a x, es decreciente respecto de y

Polinomio completo

Se caracteriza por que los exponentes de la letra considerada existen desde el mayor hasta el cero inclusive, denominado este último término independiente del polinomio con respecto a esta letra.

Ejemplo 2.32 *Sea el polinomio*

$$P(x,y) = 7x^3 + 6x^2y + 7xy^2 + 9y^3$$

Es polinomio completo con respecto a x, y su término independiente con respecto a está letra es $9y^3$

Propiedades de un polinomio completo

Propiedad 1: El número de términos de un polinomio es igual al grado de polinomios más uno.

Propiedad 2: La diferencia de grados relativos de dos términos consecutivos es igual a la unidad

$$G.R.(t_{x+1}) - G.R(t_x) = 1$$

Polinomio Homogéneo

Se caracteriza por que todos sus términos tienen igual grado absoluto

Ejemplo 2.33 *Sea el polinomio* $P(x,y) = 5x^3y^6 + 8x^2y^7 - 4xy^8$

Polinomio Heterogéneo

Son aquellos polinomios cuyos términos no todos tienen igual grado absoluto

Ejemplo 2.34 *Sea el polinomio* $P(x,y) = 9x^7y - 6x^3y + 8x^5y^6$

Polinomio Idénticos

Se caracteriza por que sus términos semejantes tienen iguales coeficientes

Polinomio idénticamente Nulo

Si sus coeficientes son iguales a cero.

Ejemplo 2.35 *Sea el polinomio:*

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

es idénticamente nulo quiere decir $a_4 = a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Polinomio Entero en x

Es aquel que se caracteriza porque todos sus exponentes son enteros y su única variable es "x" .
Un polinomio $P(x)$ se representa así:

- De primer grado: $P(x) = ax + b$
- De segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$
- De tercer grado: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y así sucesivamente.

Valor Numérico de un Polinomio

Es el valor que toma dicho polinomio, cuando se reemplaza en el valores asignados a sus variables.

Ejemplo 2.36 *Sea el polinomio:* $P(x, y) = x^2 + y^3 - 9$*, hallar* $P(3, -2)$
Solución : *Se reemplaza los valores de* x, y *, esto es*

$$P(3, -2) = (3)^2 + (-2)^3 - 9 = 9 - 8 - 9 = -8$$

Ejemplos Ilustrativos

Ejemplo 2.37 *En el siguiente monomio:*

$$\frac{x^n y^m z^{5n}}{x^{1-m} y^{n-3} z^{m-2}}$$

el grado relativo respecto a x *es* 12*, el grado relativo respecto a* y *es* 10*, Hallar el grado relativo respecto a* z*.*

Solución : Para hallar el grado respecto a z se debe calcular los valores de m y n.
Datos: Por dato (1) la diferencia de los exponentes de x es 12.

$$\begin{aligned} GR_x : n - (1 - m) &= 12 \\ n - 1 + m &= 12 \\ n + m &= 13 \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Por dato (2), la diferencia de exponentes de y es 10.

$$\begin{aligned} GR_x : m - (n - 3) &= 10 \\ m - n + 3 &= 10 \\ m - n &= 7 \qquad \spadesuit \end{aligned}$$

sumando ♣ y ♠:

$$2m = 20;\ m = 10$$

reemplazando en ♣

$$n + 10 = 13;\ n = 3$$

Luego

$$GR_z = 5n - (m-2) = 5n - m + 2$$

sustituyendo los valores de m y n:

$$GR_z = 5(3) - 10 + 2 = 7$$

Respuesta: $GR_z = 7$

Ejemplo 2.38 *Hallar el valor de "m" para que la siguiente expresión sea de segundo grado.*

$$M = \left[\frac{\sqrt[3]{(a^{-2}b^{\frac{m}{5}})^{\frac{-1}{2}}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a^0 b^{\frac{-m}{5}}}}}\right]^{-3}$$

Solución : Trabajando con el numerador:

$$\sqrt[3]{(a^{-2}b^{\frac{m}{5}})^{\frac{-1}{2}}} = a^{\frac{(-2)(\frac{-1}{2})}{3}} b^{\frac{(\frac{m}{5})(\frac{-1}{2})}{3}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{-m}{30}}$$

trabajando con el denominador

$$\sqrt[4]{a^3\sqrt{a^0 b^{\frac{-m}{5}}}} = a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{-m}{40}}$$

Reemplazando los equivalentes en la proposición:

$$\begin{aligned} M &= \left[\frac{a^{\frac{-1}{3}} b^{\frac{-m}{30}}}{a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{-m}{40}}}\right]^{-3} = \left[a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} b^{\frac{-m}{30}+\frac{m}{40}}\right] \\ M &= \left[a^{\frac{-5}{12}} b^{\frac{-m}{120}}\right]^{-3} = \left[a^{\frac{-5}{12}} b^{\frac{-m}{120}}\right]^{-3} = a^{\frac{5}{4}} b^{\frac{m}{40}} \end{aligned}$$

Por el dato G.A.M.

$$\frac{5}{4} + \frac{m}{40} = 2\ :\ \frac{50+m}{40} = 2 \qquad \therefore m = 30$$

Respuesta. : $m = 30$

Ejemplo 2.39 *Si* $a^n b^n = k^n$ *donde* k *es una constante, calcular el G.A. de*

$$M = \sqrt{\frac{k^n + b^{2n}}{a^{-2n}k^n + 1}} + \sqrt{\frac{k^n + a^{2n}}{b^{-2n}k^n + 1}}$$

Solución : Trabajando con cada expresión:

$$\begin{aligned} M_1 &= \sqrt{\frac{k^n + b^{2n}}{a^{-2n}k^n + 1}} = \sqrt{\frac{a^n b^n + b^{2n}}{a^{-2n}a^n b^n + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{b^n(a^n + b^n)}{\dfrac{b^n}{a^n} + 1}} = \sqrt{\frac{a^n b^n(a^n + b^n)}{b^n + a^n}} \\ &= \sqrt{a^n b^n} = a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \sqrt{\frac{k^n + a^{2n}}{b^{-2n}k^n + 1}} = \sqrt{\frac{a^n b^n + a^{2n}}{b^{-2n}a^n b^n + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{a^n(b^n + a^n)}{\dfrac{a^n}{b^n} + 1}} = \sqrt{\frac{a^n b^n(b^n + a^n)}{a^n + b^n}} \\ &= \sqrt{a^n b^n} = a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$G.A.M_1 = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{2n}{2} = n$$

$$G.A.M_2 = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{2n}{2} = n$$

Por lo tanto G.A de M es n
Respuesta: $mGAM = n$

2.4. Operaciones con Expresiones Algebraicas

2.4.1. Suma y Resta

Para sumar o restar expresiones algebraicas, se suman o se restan términos semejantes, se denomina términos semejantes a aquellos que tienen la misma parte literal afectada por los mismos exponentes, los coeficientes pueden ser iguales o diferentes.

Supresión de signos

Es la operación que permite eliminar los signos de agrupación, se opera así:

1. Cuando el signo de colección está precedido del signo más, se elimina sin producir ningún cambio:

$$a + (b - c) = a + b - c$$

2. Cuando el signo de colección está precedido del signo menos, se elimina cambiando de signo a todos los términos que se encuentran dentro de el, así:

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Introducción de Signos de Colección

Es la operación que permite agrupar dos o más términos en uno, está operación se realiza así:

1. Cuando va ir precedido del signo más, se escribe el signo de colección respectivo, sin realizar ningún cambio de signo a los términos que quedan dentro de el, así

$$a + b - c = a + (b - c)$$

Cuando va ir precedido del signo menos, se escribe el signo de colección respectivo, cambiando de signo de colección respectivo, cambiando de signo a todos los términos que se introducen. Así:

$$a - b + c = a - (b - c)$$

2.4.2. Multiplicación de Expresiones Algebraicas

Definición 2.4.1 *La multiplicación es una operación que consiste en obtener una tercera expresión llamada producto, conociendo otras dos expresiones llamadas multiplicando y multiplicador*

El multiplicador y el multiplicando son llamados factores del producto

Propiedades

1. Conmutatividad : $ab = ba$
   el orden de los factores no altera el producto

2. Asociatividad: $abcd = (ab) * (cd) = (abc) * d$
   Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.

1. El término independiente del producto es igual al producto de los términos independientes de los factores

2. El grado de producto de dos polinomios es igual a la suma de los grados de los factores

2.4.3. Multiplicación de Monomios

Cuando son dos Monomios

Se multiplican los signos, luego los coeficientes y por último las partes literales utilizando la teoría de los exponentes

Multiplicación de Polinomios

1. Se ordenan los polinomios con respecto a una letra preferentemente en forma descendente, completando con ceros en cada término que falla y se escribe uno debajo del otro.

2. Se multiplican separadamente cada término del multiplicador, por cada uno de los términos del multiplicando.

3. Los productos parciales que se escriben en forma ordenada uno debajo del otro de tal manera que constituyen términos semejantes.

4. Se suman los productos parciales, obteniéndose el producto total

Ejemplo 2.40 *Multiplicar* $4x^3 + 5x^2y + 7xy^2 - 2y^3$ *por* $2x^2 - 5xy + 3y^2$

Solución :

$$\begin{array}{llllll}
4x^3 & +5x^2y & +7xy^2 & -2y^3 & & \\
 & +2x^2 & -5xy & +3y^2 & & \\
\hline
8x^5 & +10x^4y & +14x^3y^2 & -4x^2y^3 & & \\
 & -20x^4y^3 & -25x^3y^2 & -35x^2y^3 & +10xy^4 & \\
 & & +12x^3y^2 & +15x^2y^3 & +21xy^4 & -6y^5 \\
\hline
8x^5 & -10x^4y & +x^3y^2 & -24x^2y^3 & +31xy^4 & -6y^5
\end{array}$$

2.4.4. Productos Notables

Definición 2.4.2 *Denominados también identidades algebraicas. Se llaman productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir sin verificar la multiplicación:*

1. Cuadrado de una suma y una diferencia de dos cantidades
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
2. Producto de una suma por su diferencia de dos cantidades
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
da diferencia de cuadrados
3. Cuadrado de un trinomio
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$
4. Cubo de una Suma o de una Diferencia
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
5. Producto de dos Binomios que tienen un término común
$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$
6. Producto de tres Binomios que tienen un término común
$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$
7. Producto de un binomio por un trinomio que da una suma o diferencia de cubos
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
8. Identidades de Legendre:
$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
9. Identidades de Lagrange.
$$(ax+by)^2 + (bx-ay)^2 = (x^2+y^2)(a^2+b^2)$$
$$(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

2.5. Logaritmos

Definición 2.5.1 *El logaritmo de un número positivo N, en base b, positiva y distinta de la unidad, es el exponente x a que debe elevarse otro número llamado base para obtener dicho número.*

Definición 2.5.2 *Se llama logaritmo de un número N, en una base dada b, positiva y distinta de la unidad, al exponente x a que debe elevarse otro número llamado base para obtener el número dado. Esto es:*

$$\begin{array}{cc} \log_b N = x & \Leftrightarrow b^x = N \\ \text{Notación logarítmica} & \text{notación exponencial} \end{array}$$

Donde

$N =$Número positivo
$b =$ Número positivo y diferente de 1 base, $b > 0, b \neq 0$
$x =$ exponente de la base.

De la definición deducimos que

$$N = b^{\log_b N}$$

Identidad que es útil algunas veces

Ejemplo 2.41 *Hallar el logaritmo de 81 en base 3*

Solución: Por definición de logaritmos

$$\begin{array}{ll} \log_3 81 = x & \Leftrightarrow 3^x = 81 \\ & \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \\ \text{bases iguales} & \Rightarrow x = 4 \end{array}$$

Ejemplo 2.42 *Hallar el logaritmo de $8\sqrt[3]{4}$ en base $\sqrt[5]{2}$*

Solución: Sea x el logaritmo buscado. Por definición:

$$\begin{array}{ll} \log_{\sqrt[5]{2}} 8\sqrt[3]{4} = x & \Leftrightarrow (\sqrt[5]{2})^x = 8\sqrt[3]{4} \\ & \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^3(2^2)^{\frac{1}{3}} \\ & \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^{3+\frac{2}{3}} \\ & \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^{\frac{11}{3}} \\ \text{igualando exp} & \dfrac{x}{5} = \dfrac{11}{3} \\ \text{de donde} & x = \dfrac{55}{3} \end{array}$$

Por lo tanto

$$\log_{\sqrt[5]{2}} 8\sqrt[3]{4} = \frac{55}{3}$$

2.5.1. Propiedades

1. P1. La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa
2. P2. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es igual a la unidad: $\log_b b = 1$
3. P3. En todo sistema, el logaritmo de 1 es cero, $\log_b 1 = 0$
4. P4. Logaritmo de un producto: $\log_b(M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$
5. P5 El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores
6. P6. Logaritmo de un cociente: $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. P7. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.
8. P8. Logaritmo de una potencia: $\log_b M^n = n \log_b N$
9. P9. El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base (del mismo)
10. P10. Logaritmo de una Raíz: $\log_b \sqrt[n]{M} = \dfrac{\log_b M}{n}$
11. P11. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz.
12. P12 En todo sistema de logaritmos, si se eleva a la base y al número a una potencia "n",o a una raíz "n", el resultado es igual al logaritmo dado, no varia.

    $$\log_b N = \log_{b^n} N^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{N}$$

    Cambio de un sistema a otro

    $$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

    Cologaritmo.- Se llama cologaritmo de un número, al logaritmo del recíproco de un número

    $$\text{colog}_b = \log_b \left(\frac{1}{N}\right) = -\log_b N$$

2.5.2. Ejercicios Ilustrativos

Ejemplo 2.43 *Hallar* $\log_8 0{,}125$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_8 0.125 \quad & \Leftrightarrow \log_8 0.125 = x \\ & \Leftrightarrow 8^x = 0.125 = \frac{1}{8} = 8^{-1} \Rightarrow x = -1 \\ \therefore \log_8 0.125 = -1 & \end{aligned}$$

Ejemplo 2.44 *Hallar* $\log_{9\sqrt{3}} 0.\widehat{1}$

Solución:

$$\log_{9\sqrt{3}} 0.\widehat{1} \quad \Leftrightarrow (9\sqrt{3})^x = 0.\widehat{1}$$

$$\text{sea } a = 0.\widehat{1} = 0.1111111\ldots \tag{2.1}$$

multiplicando por 10 ambos miembros en ecuación (2.1)

$$10a = 1.1111111\ldots \tag{2.2}$$

(2.2) - (2.1) : $\quad 9a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2} = 3^{-2} \Rightarrow a = 3^{-2}$
Luego

$$\begin{aligned} & (9\sqrt{3})^x = 0.\widehat{1} \\ & (3^2 3^{\frac{1}{2}})^x = 3^{-2} \\ & 3^{\frac{5}{2}x} = 3^{-2} \Rightarrow \tfrac{5}{2}x = -2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{5}} \\ & \therefore \log_{9\sqrt{3}} 0.\widehat{1} = \frac{-4}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.45 *Hallar el valor de x para que se cumpla la igualdad* $5\log x - \log 288 = 3\log\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Solución: Aplicando propiedad de logaritmo de una potencia y cociente

$$\begin{aligned} \log x^5 - \log 288 &= \log\left(\frac{x}{2}\right)^3 \\ \log \frac{x^5}{288} &= \log\left(\frac{x}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

Igualando logaritmos

$$\begin{aligned} \frac{x^5}{288} &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8} \Rightarrow x^3 = 0 \vee \left(\frac{x^2}{288} - \frac{1}{8}\right) = 0 \\ x^2 &= \frac{288}{8} = 36 \Rightarrow x = 6 \vee x = -6 \end{aligned}$$

Por tanto el valor que puede tomar x es 6 $\quad \therefore x = 6$

Observación: x no pude tomar el valor de -6 debido a que x^5 y $\left(\frac{x}{2}\right)^3$ tienen que ser positivos por definición de logaritmos

Ejemplo 2.46 *Hallar el valor de y para que se cumpla la igualdad*

$$\log_b(y+1) + \log_b(y-5) + \log_b \frac{1}{7} = 0$$

Solución: Aplicando propiedades, producto de logaritmos y definición de logaritmos

$$\frac{(y+1)(y-5)}{7} = b^0 \Leftrightarrow \frac{(y+1)(y-5)}{7} = 1 \Rightarrow y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$(y-6)(y+2) = 0 \Rightarrow y = -2 \vee y = 6 \qquad \therefore \boxed{y = 6}$$

Ejemplo 2.47 *Hallar el valor de x para que se cumpla la igualdad*

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{4x-9} = \left(\frac{9}{4}\right)^{9x-4}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{9}\right)^{4x-9} &= \left(\frac{9}{4}\right)^{9x-4} \\ \left(\frac{4}{9}\right)^{4x-9} &= \frac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)^{9x-4}} \Rightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^{13x-13} = 1 \\ \Rightarrow 13x - 13 &= 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.48 *En la siguiente ecuación logarítmica, encontrar la solución positiva de "x"*

$$\log_{(x+3)} 6 - \frac{\log_{(3+x)} 4}{\log_{(4-x)} 4} = 1$$

A) 2 B) 4 C) 3 D) 6 E) Ninguno

Solución: Aplicando cambio de base en base 10:

$$\frac{\log 6}{\log(x+3)} - \frac{\dfrac{\log 4}{\log(3+x)}}{\dfrac{\log 4}{\log(4-x)}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\log 6}{\log(x+3)} - \frac{\log(4-x)}{\log(3+x)} = 1$$

común denominador $\quad \log 6 - \log(4-x) = \log(x+3)$

Propiedad de cociente

$$\log \frac{6}{4-x} = \log(x+3)$$

$$\frac{6}{4-x} = x+3$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

De donde se tiene $x = 3$

Ejemplo 2.49 *Hallar el valor de x para que se cumpla la igualdad*

$$3^{\log x+1} - 5^{\log x-1} = 5^{\log x} - 3^{\log x-1}$$

Solución: sea $y = \log x$
reemplazando $y = \log x$ en $3^{\log x+1} - 5^{\log x-1} = 5^{\log x} - 3^{\log x-1}$
$3^{y+1} - 5^{y-1} = 5^y - 3^{y-1} \Rightarrow 3^{y+1} + 3^{y-1} = 5^y + 5^{y-1}$
$\Rightarrow 3^{(y+1)+1-1} + 3^{y-1} = 5^{y-1} + 5^{y+(-1+1)}$
$\Rightarrow 3^{y-1}3^2 + 3^{y-1} = 5^{y-1} + 5^{y-1}5^1$
$\Rightarrow 3^{y-1}(3^2+1) = 5^{y-1}(1+5^1)$
$\Rightarrow 10 \cdot 3^{y-1} = 6 \cdot 5^{y-1} \Rightarrow (2)(5) \cdot 3^{y-1} = (2)(3) \cdot 5^{y-1}$
$\Rightarrow 3^{-1} \cdot 3^{y-1} = 5^{-1} \cdot 5^{y-1} \Rightarrow 3^{y-2} = 5^{y-2}$

$$3^{y-2} = 5^{y-2} \tag{2.3}$$

la ecuación (2.3) se verifica si los exponentes de 3 y 5 son cero es decir si

$$y - 2 = 0$$

de donde $y = 2$
reemplazando $y = 2$ en $y = \log x$
$2 = \log x \Rightarrow x = 100$

Ejemplo 2.50 *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \\ 3^x \cdot 2^y = 576 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \\ 3^x \cdot 2^y = 576 \end{cases} \equiv \begin{cases} y-x = (\sqrt{2})^4 \\ 3^x \cdot 2^y = 576 \end{cases} \equiv \begin{cases} y-x = 4 \\ 3^x \cdot 2^y = 576 \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} y-x = 4 & (\clubsuit 1) \\ 3^x \cdot 2^y = 576 & (\spadesuit 2) \end{cases}$$

de ($\clubsuit$1) se tiene

$$y = x + 4 \qquad (\clubsuit 1.2)$$

reemplazando $y = x + 4$ en la ecuación ($\spadesuit$2)

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576$$

de donde

$3^x \cdot 2^x \cdot 2^4 = 576 \Rightarrow 3^x \cdot 2^x = \dfrac{576}{2^4} = 36 \Rightarrow 3^x \cdot 2^x = 6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$

reemplazando $x = 2$ en ($\clubsuit$1) se tiene $y = 6$

$\therefore x = 2,\ y = 6$

Nota: $3^x \cdot 2^x = \dfrac{3^x}{\dfrac{1}{2^x}} = \dfrac{3^x}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x} = \left(\dfrac{3}{\dfrac{1}{2}}\right)^x = 6^x$

Capítulo 3

PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

3.1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3.1.1. Operaciones con expresiones algebraicas

3.1.2. Productos y cocientes notables

3.1.3. Teoremas del residuo. Divisibilidad

3.1.4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.Problemas

3.1.5. Descomposición factorial

3.1.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si los polinomios:
   $A = 3x^4 - 5x^2 + x - 1$; $B = 2x^4 + x^3 - 2x + 3$; $C = 4x^3 - x^2 + 7$; $D = 3x^2 - 4x + 2$; $E = x^4 - 2x^3 + 5x$; $F = -x^3 - 9x$; $G = -x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 9$.
   Calcular: $M = A - \{B + C - [D - E - (F + G)]\} - x^3$

   A) $2x^4$ B) x^3 C) x^4 D) $2x^3$ E) $2x$
   Respuesta: C)

2. Simplificar:

   $E = 2x - \{-y + [2 - (-x - \overline{y - 2 + (x + y)}])$

   A) x B) 0 C) y D) $2y$ E) $2x$ Respuesta : C)

3. Una persona A, tiene a pesetas, otra persona B tiene b pesetas, las dos juntas su dinero y gastan en tres ocasiones diferentes una suma desconocida x. En el momento de separarse, A toma una suma c. Lo que le queda a B es:

   A) $a+b+3c-x$ B) $a+b+x-c$ C) $a+b-x-c$ D) $a+b-3x-c$ E) $a+b+3x-c$
   Respuesta: B)

4. Efectuar: $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$

   A) 0 B) a C) $4ab$ D) $-4ab$ E) $N.A.$
   Respuesta: C) $4ab$

5. Efectuar: $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})(\sqrt{5-2\sqrt{6}})$

   A) 10 B) 5 C) $\sqrt{10}$ D) 1 E) $\sqrt{13}$

6. Efectuar: $(x^2+x+6)(x^2+x-3)-(x^2+x+9)(x^2+x-6)$

   A) 12 B) 18 C) 15 D) 36 E) 45

7. El primero y el último término de un binomio cuadrado perfecto son $36x^2$ y $4y^2z^2$. ¿Cuál de los siguientes podría ser el término central

   A) $24xyz$ B) $2xyz$ C) $12x^2y^2z^2$ D) $12xyz$ E) $6x^2yz$
   Respuesta: A) $24xyz$

8. Si $x^2-3x+2\equiv(x-k)^2+p$ ¿Cuál es el valor de p ?

   A) $-\frac{1}{4}$ B) 2 C) 3 D) -2 E) 1

9. Hallar el valor de: $(a+b)(b+c)(a+c)$. A partir de estas condiciones: $a+b+c=6$ $a^3+b^3+c^3=24$

   A) 64 B) 32 C) 16 D) 8 E) 4

10. Si $a+b+c=0$, hallar el valor de: $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$

    A) 3 B) -3 C) 1 D) 0 E) 6

11. Si: $xy = b$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = a$, entonces $(x+y)^2$ es igual a:

    A) $(a+2b)^2$ B) a^2+b^2 C) $b(ab+2)$ D) $ab(b+2)$
    E) $\frac{1}{a}+2b$

12. Si: $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$, calcular: $\sqrt{\dfrac{x^5+y^5+z^5}{(x+y+z)^5}}$

    A) 9 B) 3 C) 1 D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{9}$

13. Si: $(a+b)^2+(a-b)^2=-2ab$, Hallar el valor de: $\dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{a^3-b^3}{3ab}$

    A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) -1
    Respuesta: $E)\ -1$

14. Si $x = \sqrt[3]{3\sqrt{8}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{8}}$, calcular: x^3-3x+4

    A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

15. Si $x+y+z+w=2a$. Simplificar:

$$\frac{(a-x)^2+(a-y)^2+(a-z)^2+(a-w)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2+(z+w)^2+(z-w)^2}$$

    A) 1 B) 2 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) Ninguno

16. Si $(s+\dfrac{1}{x})^2=45$; Hallar $(x^2-\dfrac{1}{x^2})^{12}$

    A) 15625 B) 16525 C) 156250 D) 12565 E) 16552

17. Sabiendo que: $a+b+c=1; ab+bc+ac=2$; determinar el valor de:
    $3(a^4b^4+c^4)-4(a^3+b^3+c^3)$

    A) 0 B) -1 C) 23 D) 17 E) 6

18. Efectuar
    $E=(x^2-y^2)(x^2+y^2)+2y(x^3+y^3)-(x^2-y^2)^2-2x^2y(x+y)$

    A) x^3 B) y^3 C) $2x^2y^2$ D) 0 E) x^4

19. Efectuar

$$E = \sqrt[3]{(2x+3y+z-2t)^3 - 9y(2x+z-2t)(2x+3y+z-2t) - (2x+z-2t)^3}$$

A) $3x$ B) $3y$ C) $3z$ D) y E) z

20. Efectuar:

$$E = \frac{\left\{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2 - 4\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^2}{\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}^2 - \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}^2}$$

A) $4ab$ B) $\dfrac{4}{ab}$ C) $16ab$ D) $\dfrac{16}{ab}$ E) 4
Respuesta : $E)$ 4

21. ¿Que lugar ocupa el término que es idéntico en los cocientes notables, $\dfrac{x^{700}-y^{300}}{x^7-y^3}$; $\dfrac{x^{560}-y^{480}}{x^7-y^6}$ con respecto al primero de ellos?

A) 21^{avo} B) 40^{avo} C) 41^{avo} D) 31^{avo}
E) 42^{avo}

22. En el cociente notable: $\dfrac{x^{5m-1}-y^{12m-5}}{x^{m-5}-y^{m-1}}$. Calcular el grado absoluto del término central de su desarrollo.

A) 55 B) 60 C) 66 D) 70 E)
80

23. Hallar el resto de la division

$$\frac{(15x^4+9x^2+13)^3+(15x^4+x^2+11)^2+13}{15x^4+9x^2+10}$$

A) 40 B) 41 C) 42 D) 28 E)
26

24. Hallar el resto de la division:

$$\frac{(x-2)^7+(x-3)^6+(x-4)^5+10}{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

y dar la suma de los coeficientes de dicho resto.

A) 49 B) 211 C) -214 D) 46 E) 47

25. Hallar el resto en la division

$$\frac{(x+1)^{35}+7(x+1)^{28}+3(x+1)^7+3}{x^2+2x+2}$$

A) $6+4x$ B) $5+4x$ C) $5-4x$ D) $6-4x$ E) $2-4x$

26. Calcular "m" si la division

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)+m(x^4+y^4+z^4)}{x+y+z}$$

es exacta.

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 3

27. Hallar el resto de:
$\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x+1)(x-1)}$; Para $n =$ número par positivo.

A) nx B) x C) 0 D) $nx-n$ E) $-nx+m$
Respuesta : C)

28. Si el siguiente polinomio :
$(mx+1)^2+(m+x)^2+mx$ es divisible entre $(x+1)$. Calcular "m".

A) $n2$ B) -2 C) 4 D) 5 E) 0
Respuesta : A)

29. Calcular "m" si el resto de la división de:
x^3-mx^2+7x-1 entre $x-2$, es el triple del resto de dividir:
$x^2-(m+2)x-11$ entre $x+2$

A) -3 B) 4 C) 5 D) 3 E) -4
Respuesta : D)

30. Hallar el resto de dividir:
$P(x) = (x-1)^6 x^3 (2-x^3)$, entre (x^2-2x-2).

A) 128 B) -128 C) -216 D) 216 E) 0
Respuesta : C)

31. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x+a)^4$ se obtuvo como residuo: $(x^3-3a^2x+2a^3)$. Calcular el resto de dividir $P(x)$ entre $(x+a)^2$.

A) $x+a$ B) 4 C) xa^2+4x^3 D) $4a^3$ E) $x+4a$
Respuesta : D)

32. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x-3)^2$ deja un residuo $(x-3)$. ¿ Cuál es el resto de dividir el cuadrado de $P(x)$ entre $(x-3)$?

A) 3 B) 9 C) 0 D) -3 E) 8
Respuesta : C)

33. Hallar el residuo de.

$$\left[x^{3^{(n+2)}} + 3^{3^n}\right] \div [x^9+3]$$

A) 3^n B) 3^{3^n} C) 3^{3^n-1} D) 0 E) $1-3^{n^3}$
Respuesta : D)

34. Resolver la ecuación: $\dfrac{(a+b)x}{a-b} + \dfrac{ax}{a+b} - \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{ax}{a-b} + \dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

A) $2b$ B) $2a$ C) 2 D) $2a+2b$ E) $a+b$

35. Resolver la ecuación: $\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x} = 3\sqrt{a+b-2x}$

A) a B) 1 C) $2a$ D) $3a$ E) $2b$

36. ¿ Cuántos alumnos faltaron a la clase de algebra, sabiendo que el número de los que faltaron es menor que 15, que disminuyendo dicho número es su mitad más 8, resulta igual a 4 veces su octava parte menos 2?

A) 8 B) 4 C) 14 D) absurdo E) Indeterminado

37. En una carretera de distancia 22,5 $km.$, un ciclista avanza a 40 km/h, pero al llegar al tramo final, cambia su velocidad a 50 km/h, haciendo un tiempo total de 33 minutos. ¿Cuál es la longitud del tramo final?

    A) 2 500 m B) 1 000 m C) 500 m D) 2 000 m E) 1 500 m
    Respuesta: 2 500 m.

38. Dividir 196 en tres partes tales que la segunda sea el duplo de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 20.
    Respuesta: 36, 72 y 88

39. Un comerciante adquiere 50 trajes y 35 pares de zapatos por 16000 bolivianos. Cada traje costó el doble de lo que costó cada par de zapatos mas 50 bolivianos. Hallar el precio de un traje y de un par de zapatos.
    Respuesta: Par de zapatos, 100 $bs.$; traje 250 $bs.$

40. 6 personas iban a comprar una casa contribuyendo por partes iguales pero dos de ellas desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner 2000 bolivianos más . ¿Cuál era el valor de la casa?
    Respuesta: 24000 $bs.$ costo de casa

41. El largo de un buque, que es 461 pies, excede en 11 pies a 9 veces el ancho. Hallar el ancho.
    Respuesta: 50

42. Tengo 1.85 \$ en monedas de 10 y 5 centavos. Si en total tengo 22 monedas, ¿cuántas son de 10 centavos y cuántas de 5 centavos?

43. Hallar 3 números enteros consecutivos, tales que el duplo del menor más el triplo del mediano más el cuadruplo del mayor equivalga a 740.

44. Un hombre ha recorrido 150 kilómetros. En auto recorrió una distancia triple que a caballo y a pie, 20 kilómetros menos que a caballo. ¿Cuántos kilómetros recorrió de cada modo?
    Respuesta: En auto 102 $km.$; a caballo, 34 $km.$ y a pie 14 $km.$

45. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 31. Hallar los números.
    Respuesta: 15 y 16

46. 5 personas han comprado una tienda contribuyendo por partes iguales. Si hubiera habido 2 socios más, cada uno hubiera pagado 800 bolivianos menos. ¿Cuánto costó la tienda?
Respuesta: $14000\, bs.$

47. En cada día, de lunes a jueves, gané 6 \$ más que lo que gané el día anterior. Si el jueves gané el cuadruplo de lo que gané el lunes, ¿cuánto gané cada día?
Respuesta: Lunes, 6 \$; martes 12 \$; mierciles 18 \$ y jueves 24 \$

48. Una sala tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en $6\, m.$ y el ancho se aumenta en $4\, m.$ la superficie de la sala no varía, Hallar las dimensiones de la sala.
Respuesta: Largo $24\, m.$ y ancho $12\, m.$

49. Dentro de 4 años la edad de Adrián será el triplo de la de Roberto, y hace dos años era el quintuplo. Hallar las edades actuales.
Respuesta: Edad actual de Adrián 32 años; edad actual de Roberto 8 años

50. Si la ecuación : $(n-2)x^2 + 3x + 1 = 0$, es de 1^{er} grado en x, es necesario que "n" sea:

A) 1 B) -2 C) -1 D) 2 E) 3

51. Resolver:
$$\frac{2-x}{3} + \frac{3-x}{4} + \frac{3}{4} = \frac{x-4}{5} . \frac{x-5}{6}$$

A) -4 B) 8 C) -8 D) 4 E) 12

52. Despeje x de:
$$\frac{2x+a}{b} - \frac{b-x}{a} = \frac{3ax + (a-b)^2}{ab}$$

A) b B) a C) ab D) $2a$ E) $2b$

53. Resolver:

$$\frac{3}{3+\cfrac{3}{x+\cfrac{3}{4}}}=\frac{3}{3+\cfrac{3}{x+\cfrac{3}{5}}}$$

A) 1 B) $-\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 0 E) $\nexists x$

54. Si la ecuación: $\frac{a}{b}(x-a)=\frac{b}{a}(x-b)$; es incompatible, es correcto que:

A) $2a-b=0$ B) $a-b=0$ C) $a+b=0$ D) $a^2-3b=0$
E) $a+2b=0$

55. Resolver:

$$\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x-4}+\sqrt{4x-3}$$

indicando luego la naturaleza de la raíz:

A) Primo B) Par C) Irracional D) Impar E) Fracción

56. Resolver para "x" :

$$\frac{ax-1}{a}+\frac{bx-1}{b}=(2-a-b)x$$

A) $a+b$ B) ab C) $\frac{1}{ab}$ D) $a+b-2$ E) $a-b$

57. ¿ Para qué valor de del parámetro "n " la ecuación en x :

$$8nx+2n-9=nx+2(x+n+7);$$

será incompatible?

A) $\frac{7}{2}$ B) $-\frac{7}{2}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $-\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

58. Hallar el valor de a para que el grado del siguiente polinomio sea 9:

$3x^{a+1}y-4^{a+2}x^ay-5x^2$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

59. El polinomio: $x^{m+3} + x^{n+1}y + y^4$ es homogéneo. Hallar: $m + n$.

    A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) no se puede determinar

60. hallar $2a + b$, si se tiene que:
    $(2a - b)x^2 + 4bx + 2c \equiv 7x^2 + 20x - 5$

    A) 21 B) 17 C) 19 D) 11 E) 13

61. Hallar el valor de n, para para que el grado de $(2x^{n+2}y)^3$ sea 18.

    A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

62. Hallar n de tal forma que la expresión: $\sqrt[3]{3xn^2 \div (2^n \sqrt{x^{-2,5}})} + nx^{\frac{n^2}{3}+1}$ sea de grado $\dfrac{7}{3}$. Luego respecto al valor de n se puede afirmar:

    A) $2,1 < n < 2,5$ B) $1,5 < n < 2,2$ C) $4 < n < 5$ D) $3 < n < 4$

63. los polinomios: $P(x) = 2(mx + n)^2 + mx^2 - 2n$; $R(x) = 4(9x^2 + 8x + p)$ son idénticos. Hallar $P(-1)$, sí además se sabe que: $m > 0$

    A) 8 B) 12 C) -4 D) $0{,}5 < n < 1$ E) 0 E) -6

64. Si $Q(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots 100x^{100}$. Halle $Q(-1)$

    A) 100 B) 99 C) 50 D) 25 E) 199

65. Encontrar el polinomio cuadrático $F(x)$ que verifica:
    $F(x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}) + F(x + -\dfrac{1}{\sqrt{2}}) \equiv 6x^2 + 8x + 5$ para luego indicar la suma de sus coeficientes:

    A) 1 B) 8 C) 2 D) 9 E) 13

66. Si: $P(x; y) \equiv (abc+16)x^{-a}y^b - (bc+a)x^by^c + (b-c)x^{-a}y^c$ es un polinomio idénticamente nulo. Calcular "$a + b + c$."

    A) 8 B) 4 C) 2 D) 1 E) 0

3.2. FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.2.1. Fracción algebraica. Simplificación de fracciones

3.2.2. Operaciones con fracciones algebraicas

3.2.3. Ecuaciones fraccionarias de primer grado con dos incógnitas

3.2.4. Problemas con ecuaciones fraccionarias

3.2.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El equivalente de: $\dfrac{a^{-1}b^{-1}+a^{-2}b^{-1}}{b^{-2}-a^{-2}}$, es :

   A) $\dfrac{1}{a+b}$ B) $\dfrac{b(a+1)}{(a+b)(a-b)}$ C) $a-b$ D) $a+b$ E) Ninguno

   Respuesta $B)\dfrac{b(a+1)}{(a+b)(a-b)}$

2. Efectuar : $\dfrac{x+4}{x-3} \div \dfrac{x+1}{x-1}$

   A) $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-2x+3}$ B) $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-2x-3}$ C) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x-3}$
   D) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+2x+3}$ E) *ninguno*

3. Para que valores de m, la expresión mostrada no está definida en el conjunto de los números reales.

$$\frac{1}{\dfrac{m^2-m-2}{m^2-4}}$$

   A) $\{-2;-1\}$ B) $\{-1;2;-2\}$ C) $\{2;-2\}$ D) $\{-1;2\}$
   E) $\{1;-1;2;-2\}$

4. ¿ Cuál es el $M.C.D.$ de $P(x)$; $Q(x)$ y $R(x)$?

   $P(x)=6x^2(x+1)^3(x-1)^3; Q(x)=8x(x+1)^2(x+2); R(x)=12x^2(x+1)^2(x+3)^2$

   A) x^2+x+1 B) $(x-1)(x^2+1)$ C) $(x+1)(x^2-1)$
   D) $x(x^2-1)$ E) $2x(x+1)^2$

5. El producto de dos polinomios es $x^4 - 18x^2 + 81$ y el cociente de su $M.C.M.$ y su $M.C.D.$ es $x^2 - 6x + 9$. Determinar es $M.C.D.$ de dichos polinomios.

   A) $x^2 - 9$ B) $x + 1$ C) $x - 1$ D) $(x + 1)(x + 3)$ E) $x + 3$

6. La expresión simplificada de : $2 - \dfrac{2}{1 - \dfrac{2}{2 - \dfrac{2}{x^2}}}$; es :

   A) 1 B) $2x^2$ C) 0 D) $2x$ E) x^2

7. Si $a + b + c = 0$; donde $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$, hallar el valor de :

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right)$$

   A) -1 B) 3 C) 9 D) 8 E) 0

8. Si : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.
   Reducir : $\dfrac{(a+c)(b+d)}{(a+b+c+d)} - \dfrac{ab}{a+b} - \dfrac{cd}{c+d}$

   A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

9. ¿Cuál debe ser el valor de "n" para que la fracción : $\dfrac{x^3 - nx^2 + 19x - n - 4}{x^3 - (n+1)x^2 + 23x - n - 7}$ admita simplificación?

   A) 7 B) 6 C) 5 D) 15 E) 8

10. Simplificar la fracción $f = \dfrac{6x^2 - 8xy - 8y^2 + 26yz - xz - 15z^2}{12x^2 - xy - 6y^2 + 29yz + xz - 35z^2}$ y marcar la suma del denominador y denominador

    A) $7x + y + 2z$ B) $7x - y + 2z$ C) $6x - y + 2z$
    D) $6x + y + 2z$ E) $6x + 2z$

11. Si $mab = nac = pbc = 4$, simplificar $f = \dfrac{mnpabc(ab + ac + bc)(m + n + p)}{(a + b + c)(mn + mp + np)}$

    A) 1 B) 4 C) 16 D) m+n+p E) $a + b + c$

12. calcular $m-n$ si la fracción $f = \dfrac{(4m+n)x^2+5xy+3(2m-1)y^2}{(m-2n)x^2+10xy-7(n+1)y^2}$ es independiente de x y y. A) 20 B) 7 C) 11 D) 8 E) 6
    Respuesta 11

13. Simplificar $f = (\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-2x-15}) \div (\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x-5})$
    A) $\dfrac{x+2}{x+1}$ B) $\dfrac{x-2}{x-1}$ C) $\dfrac{x-1}{x+2}$ D) $x+1$
    E) 1

14. Simplificar : $f = \dfrac{\left(\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\left(\dfrac{b^2}{a-b}+\dfrac{3b^2}{a+b}-\dfrac{2ab^2}{a^2-b^2}\right)}{\dfrac{4b}{a}-\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}$
    A) $\dfrac{a^2-b^2}{-2}$ B) $-a$ C) $\dfrac{a}{b}$ D) $\dfrac{a(a^2-b^2)}{-2}$ E) Ninguno
    Respuesta: D) $\dfrac{a(a^2-b^2)}{-2}$

15. La diferencia de dos números es 6 y la mitad del mayor excede en 10 a los $\frac{3}{8}$ del menor. Hallar los números.
    Respuesta: 62, 56.

16. Un número se aumento en 6 unidades; esta suma se dividió entre 8 ; al cociente se le sumó 5 y esta nueva suma se dividió entre dos , obteniendo 4 de cociente. Hallar el número.
    Respuesta: 18.

17. Un hombre gasta la mitad de su sueldo mensual en el alquiler de la casa y alimentación de su familia y $\frac{3}{8}$ del sueldo en otros gastos. Al cabo de 15 meses ha ahorrado 300 \$. ¿Cuál es su sueldo mensual?
    Respuesta: 160 \$

18. ¿A qué hora, entre las 9 y 10 coinciden las agujas del reloj?

19. Adrián y Beto trabajando juntos hacen una obra en 6 días, Beto solo puede hacerla en 10 días. ¿En cuántos días puede hacerla Adrián?
    Respuesta: 15 días

20. Un capataz contrata un obrero ofreciéndole un sueldo anual de 3000 \$ y una sortija. Al cabo de 7 meses el obrero es despedido y recibe 1500 \$ y la sortija. ¿ Cuál era el valor de la sortija?
Respuesta: 600 \$

21. Un padre de familia gasta los $\frac{3}{5}$ de su sueldo anual en atenciones de su casa; $\frac{1}{8}$ en ropa, $\frac{1}{20}$ en paseos y ahorra 810 \$ al año. Cuál es su sueldo anual?
Respuesta: 3600 \$

22. Un comandante dispone sus tropas formando un cuadrado y ve que le quedan fuera 36 hombres. Entonces pone un hombre más en cada lado del cuadrado y ve que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres había en el lado del primer cuadrado y cuántos hombres hay en la tropa?
Respuesta: Cantidad de hombres en el lado del 1^{er} cuadrado, 55 hombres; Hombres en la tropa, 3061

23. Un número de dos cifras excede en 18 A seis veces la suma de sus cifras. Si la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades, ¿cuál es el número?
Respuesta: 72.

24. Un hombre compró un bastón, un sombrero y un traje. Por el bastón pagó 15 \$. ¿El sombrero y el bastón le costaron los $\frac{3}{4}$ del precio del traje y el traje y el bastón 5 \$ más que el doble del sombrero. ¿Cuánto le costo cada cosa?
Respuesta: Bastón, 15 \$; sombrero, 45 \$; traje, 80 \$

25. Un conejo es perseguido por un perro. El conejo lleva una ventaja inicial de 50 de sus saltos al perro. El conejo da 5 saltos mientras el perro da 2, pero el perro en 3 saltos avanza tanto como el conejo en 8 saltos. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar al conejo?
Respuesta: 300 saltos

26. Una liebre lleva una ventaja inicial de 60 de sus saltos a un perro. La liebre da 4 saltos mientras el perro da 3 , pero el perro en 5 saltos avanza tanto como la liebre en 8. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar a la liebre?
Respuesta: 225. saltos

27. Dos personas A y B, distantes entre si $70\,km$, parten en el mismo instante y van uno hacia el otro. A va a $9\,km$, por hora y B a $5\,km$ por hora. ¿Qué distancia ha andado cada uno cuando se encuentran?

28. Un tren de carga que va a $42\,km$ por hora es seguido 3 horas después por un tren de pasajeros que va a $60\,km$ por hora. ¿ En cuántas horas el tren de pasajeros alcanzará al de carga y a qué distancia del punto de partida?

3.3. SISTEMAS DE ECUACIONES

3.3.1. Sistema de ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas

3.3.2. Métodos de resolución. Problemas

3.3.3. Sistema de ecuaciones de primer grado con 3 incógnitas

3.3.4. Métodos de resolución. Problemas

3.3.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Defina la condición que debe cumplir a y b, $ab \neq 0$ de modo que el sistema adjunto.

$$\begin{cases} x - y - a = 0 \\ x(x^2 - b) - y(y^2 - b)) = 0 \end{cases}$$

presente soluciones imaginarias.

A) $a^2 - 4b < 0$ B) $2a^2 - b < 0$ C) $\dfrac{a^2}{2} - 3b > 0$ D) $\dfrac{a^2}{2} - b > 0$
E) $a^2 - 2b > 0$

Respuesta : D)

2. Un terreno cuadrado se vende en dos lotes. El primero es rectángulo uno de cuyos lados mide $30m$ y el otro los $3/5$ del lado del cuadrado; el segundo lote se vende en $S/$,12400 arazón de $S/,2,50$ el m^2. Calcule el lado del cuadrado.

A) 80 B) 62 C) 50 D) 43 E) 92

Respuesta : A)

3. Pedro, Pablo y Juan son hermanos. Pablo tiene 11 años , Juan tiene 5 años más que pedro y la suma de los años de Juan y pedro no alcanza a los de Pablo. ¿Cuántos años tiene Pedro, si su edad es un número impar?

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
   Respuesta : A)

4. Calcule m de modo que el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x + my = 2 \end{cases}$$

   se verifique para valores positivos de x y negativos de y
   A) $m < -12$ B) $m < -10$ C) $m > 10$ D) $m > 12$ E) $m < 0$
   Respuesta : A)

5. Del sistema

   $ax = by = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ despeje y en términos de a, b y c
   A) $\dfrac{\sqrt{a+b+c}}{a}$ B) $\dfrac{\sqrt{a+b+c}}{b}$ C) $\dfrac{\sqrt{a+b+c}}{c}$ D) $\dfrac{a}{\sqrt{a+b+c}}$
   E) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b+c}}$
   Respuesta : B)

6. Calcular : $x - y$ de:

$$\begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ 8x - 15 = -1 \end{cases}$$

   A) 6 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 3 D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{3}$

7. ¿Qué valor de "x" satisface el sistema

$$\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ 3x + 8y = 3 \end{cases} ?$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{6}$

8. Calcular el valor de "$x+y$"

$$\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{y}} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{4}{\sqrt{y}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

9. Encontrar el valor de "x" del sistema :

$$\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 3x + y = 4 \end{cases} ; m \neq 0$$

A) $\frac{3m-8}{m+6}$ B) $\frac{3m+8}{m-6}$ C) $\frac{3m+8}{m^2+6}$ D) $\frac{3m+8}{m+6}$ E) Ninguno

10. Halle el valor de "x" del sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{x-y+1} = a \\ \dfrac{x+y-1}{x-y+1} = ab \end{cases}$$

A) $\frac{a+1}{ab+1}$ B) $\frac{a-1}{ab+1}$ C) $\frac{a+1}{ab-1}$ D) $\frac{a+1}{a+b}$ E) $\frac{b+1}{ab+1}$

11. Calcular : $a-b$, si el siguiente sistema :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ ax - by = 10 \end{cases}$$

admita infinitas soluciones

A) 20 B) 40 C) 30 D) 60 E) 80

12. Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ 4z + 6y + z = 5 \end{cases} ;$$

Calcular el valor de : $\dfrac{x}{yz}$

A) 6   B) 12   C) $\dfrac{5}{2}$ D) 3   E) Ninguno

13. Halle el valor de `"n"` para que el sistema :

$$\begin{cases} 3x + 7y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 7z = 1 \\ nz + 2y + 3z = 0 \end{cases},$$

se cumple que: $y = z$

A) -1 B) 0   C) 1   D) 2   E) Ninguno

14. El perímetro de un cuarto rectangular es $18\,m$ y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones de cuarto.
Respuesta: $5m \times 4m$

15. 5. Hallar tres números tales que la suma del 1^{ro} y el 2^{do} excede en 18 al tercero; la suma del 1^{ro} y el 3^{ro} excede en 78 al segundo, y la suma del 2^{do} y el 3^{ro} excede en 102 al 1^{ro}.
Respuesta: 48, 60, 90

16. Dos bolsas tienen 200 bolivianos. Si de la bolsa que tiene mas dinero se sacan 15 bolivianos y se ponen en la otra, ambas tendrían lo mismo. ¿Cuánto tiene cada bolsa?
Respuesta: $115\,bs.$; $85\,bs.$

17. Cierto número de personas alquiló un ómnibus para una excusión. Si hubieran ido 10 personas más, cada uno habría pagado 5 bolivianos menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada una habría pagado 5 bolivianos más. ¿Cuántas personas iban en la excursión y cuánto pago cada una ?
Respuesta: N^{ro} de personas,30; precio de pago, $20\,bs.$

18. Dos números están en la relación de 3 a 5. Si cada número se disminuye en 10, la relación es de 1 a 2. Hallar los números.
Respuesta: 30 y 50

19. En 5 horas Adrián camina $4\,km.$ más que Roberto en 4 horas, y Adrián en 7 horas camina $2\,km.$ más que Roberto en 6 horas. ¿Cuántos $km.$ anda cada uno en cada hora?
    Respuesta: Adrián $8\,km.$; Roberto, $9\,km.$

20. El perímetro de un rectángulo es $58\,m.$ Si el largo se aumenta en $2\,m.$ y el ancho se disminuye en $2\,m$, el área se disminuye en $46m^2$. Hallar las dimensiones del rectángulo.
    Respuesta: $25m \times 4m$

3.4. TEORÍA COMBINATORIA BÁSICA

3.4.1. Permutaciones

3.4.2. Problemas

3.4.3. Binomio de Newton. Triángulo de Pascal

3.4.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿ De cuántas maneras pueden seleccionarse una consonante y una vocal de las letras de la palabra *cautivo*?
   Respuesta : 12.

2. Hay 8 candidatos para un concurso de Literatura, 7 para uno de matemáticas y 4 para uno de Ciencias naturales. ¿de cuántas maneras pueden ser calificados los concursantes?

   Respuesta : 224.

3. ¿ Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse tomando 5 letras de la palabra *cubierto*?
   Respuesta : 6720.

4. Si el cuádruplo del número de variaciones de n objetos tomados de 3 en 3 es igual al quíntuplo del número de variaciones de $n-1$ objetos tomados de 3 en 3, hallar n.
   Respuesta : 15.

5. ¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra *cuaderno*? ¿Cuántas comenzaran con c y terminarán con o?
   Respuesta : 403020., 144.

6. ¿Cuantas combinaciones diferentes pueden formarse tomando 4 de los díjitos $3, 4, 7, 5, 8, 1$? ¿ Cuátos números diferentes pueden formarse con 4 de estos díjitos'?
Respuesta : 15., 360.

7. ? cuántos cambios pueden hacerse con un llamador de 7, siendo siempre la nata mas aguda campanas
Respuesta: 720.

8. ¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la p alabra $estudio$, sin que se separen la letras t y u?
Respuesta: 1440.

9. En el consejo de una ciudad hay 25 consejos y 10 oficiales. ¿ Cuántos comites pueden formarse si deben constar de 5 consejeros y 3 oficiales?
Respuesta: 6375600.

10. Hallar el número de combinaciones de 50 objetos tomados 46 a un tiempo.
Respuesta: 230300.

11. "De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra $vinals$, si las letras ia deben ocupar solamente lugares impares?
Respuesta: 144.

12. En una biblioteca hay 20 libros latinos y 6 griegos. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un estante los libros en grupos de 5, de los cuales 3 sean latinos y 2 griegos?
Respuesta: 2052000.

13. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 12 objetos entre 4 personas?

14. En unas elecciones se necesitan para tres díjitos $10, 15$ y 20 agentes respectivamente. Si hay 45 solicitantes ¿de cuántas maneras pueden ser elegidos para los diferentes distritos?

15. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 10 hojas de examen si deben quedar de tal manera que la hoja mejor contestada y la peor no queden juntas?
Respuesta: 2903040.

16. Se dispone de 3 señoritas de ojos verdes, 4 señoritas de ojos negros y 2 señoritas de ojos pardos. Se desea formar un grupo de 6 señoritas, donde

al menos una de ellas tenga ojos verdes. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo considerando las señoritas diferentes entre si?

A) 681 B) 168 C) 56 D) 28 E) 70
Respuesta : C)

17. La suma de los números combinatorios de tres filas consecutivas del triángulo de Pascal es 3584. ¿Cuál es la primera fila consecutiva?

A) 7a. fila B) 8va. fila C) 9na. fila D) 10ma. fila
E) 11ava. fila
Respuesta: B)

18. Se coloca los elementos del triángulo de Pascal, uno a continuación de otro. ¿Qué número ocupa el lugar 155?

A) 19 B) 155 C) 17 D) 12 E) 153
Respuesta: C)

19. Encuentre el coeficiente del término que tenga como parte literal $a^2b^5x^5y^5$ en $(a+b+x+y)^{12}$

A) $\dfrac{11!}{5!}$ B) $\dfrac{12!}{4!}$ C) $\dfrac{12!}{5!7!}$ D)$\dfrac{11!}{2\times 5!}$ E) $\dfrac{10!}{3!4!5!}$
Respuesta: D)

20. En el desarrollo de $(1-x^2)^{-2}$ existe un término tal que al sumar su coeficiente con el exponente de x se obtiene 39. ¿ Qué lugar ocupa dicho término?

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22
Respuesta: C)

3.5. RADICACIÓN Y EXPONENTES

3.5.1. Raíz. Expresiones radicales

3.5.2. Teoría de exponentes

3.5.3. Operaciones de expresiones algebraicas

3.5.4. Operaciones con radicales

3.5.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar el valor de la expresión

$$E = \left\{ \frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} \right\}^{-1} \left\{ \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2}b^{-2}} \right\}$$

A) a^2 B) b^2 C)a^2b^2 D) 1 E) ab

2. Simplificar la expresión:

$$E = (x^{-2} + y^{-2})^{-1}(xy^{-1} + x^{-1}y)$$

A) x B) y C) $\dfrac{x}{y}$ D) 1 E) xy

3. simplificar

$$E = \frac{\sqrt[3]{x^2y}\sqrt[4]{y^3z}\sqrt[5]{xz^2}}{\sqrt[\frac{3}{13}]{\sqrt[5]{x}\sqrt[4]{y}}\sqrt[20]{z}}$$

A) x B) $z^{\frac{3}{5}}$ C) z D) xyz E) Ninguno Respuesta: $B)z^{\frac{3}{5}}$

4. Calcular el valor de

$$E = \left\{ \sqrt[128^{5^n}]{\sqrt[4]{7^{2^{5^n+3}}}} \right\}^{64^{5^n}}$$

A) 7 B) 1 C) 49 D) 343 E) 2401

5. Si $x^{x^{x}} = a; x^{x} = b$; entonces se puede afirmar que:

   A) $b^x = a$ B) $x^b = a$ C) $b = a^x$ D) $x^a = b$ E) *ninguno*

6. El valor numérico de $\sqrt{x}\sqrt{x}$ cuando $x = \dfrac{1}{2}$, es:

   A) $\sqrt[4]{8}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ C) 2 D) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$ E) $\dfrac{1}{2}$

7. Efectuar:

   $\left[[(6561)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

   A) $\sqrt[6]{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[8]{3}$ D) 3 E) $\sqrt[8]{27}$

8. En la expresión reducida de :

   $A = \left(ab^{-3}.c^{3}\right)^{\frac{1}{2}}.(a^{7}b^{4}.c^{2})^{\frac{1}{3}}(a^{-5}.bc)^{\frac{1}{6}}$ en cuándo excede el exponente de c al exponente de a

   A) $\dfrac{2}{3}$ b) 1 C) $\dfrac{1}{3}$ D) $\dfrac{4}{3}$ E) $\dfrac{5}{3}$

9. Siendo $a + b = 2$; reducir:

   $$R = \sqrt{\left[a^{a^{a}}\right]^{a^{2}}.\left[a^{-a^{2a}}\right]^{a^{b}}}$$

   A) 2 B) 4 C) 1 D) 16 E) 8

10. Simplificar

    $$M = \left[\sqrt[2a]{\frac{1}{a^{2}}}\right]^{8a}.\sqrt[\frac{1}{8}]{(\sqrt[8]{a^{2a}})^{\frac{4}{a}} + (\sqrt[8]{a^{4a}})^{\frac{2}{a}}}$$

    A) 1 B) a C) a^8 D) a^{16} E) 256

11. Simplificar:

    $$\left[\sqrt[x^{3}+8]{\frac{2^{x^{2}} + 3x + 4}{\sqrt[x]{32^{x^{2}}}}}\right]^{x+2}$$

    A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4 D) 8 E) 16

3.6. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

3.6.1. La ecuación de segundo grado

3.6.2. Propiedades de raíces

3.6.3. Resolución. Solución gráfica

3.6.4. Problemas con ecuaciones de segundo grado

3.6.5. Teoría de las ecuaciones de segundo grado

3.6.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Formar las ecuaciones cuyas raíces son $\frac{-4}{5}, \frac{3}{7}$
   Respuesta: $35x^2 + 13x - 12 = 0$.

2. Formar las ecuaciones cuyas raíces son $\frac{m}{n}, -\frac{n}{m}$
   Respuesta: $mnx^2 + (n^2 - m^2)x - mn = 0$

3. Formar las ecuaciones cuyas raíces son $7 \pm 2\sqrt{5}$.
   Respuesta: $x^2 - 14x + 29 = 0$.

4. Hallar los valores de m para que la ecuación $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$ tenga raíces iguales
   Respuesta: $3, 5$.

5. ¿Para qué valores de m las raíces de la ecuación $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m - 1}{m + 1}$ serán iguales en magnitud pero de signos contrarios?
   Respuesta: $\frac{a - b}{a + b}$.

6. Hallar la condición para que una de las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ sea iguale n veces la otra.
   Respuesta: $nb^2 = (1 + n)^2 ac$

7. formar la ecuación cuyas raíces sean los cuadrados de la suma y de la diferencia de las raíces de $2x^2 + 2(m + n)x + m^2 + n^2 = 0$.
   Respuesta: $x^2 - 4mnx - (m^2 - n^2)^2 = 0$.

8. ¿Para qué valor de m la expresión $y^2 + +2xy + 2x + my - 3$ podrá descomponerse en dos factores racionales?
   Respuesta: 2

9. Hallar el valor de m que haga qué la expresión $2x^2 + mxy + 3y^2 - 5y - 2$ sea equivalente al producto de dos factores lineales.
   Respuesta: $\neq 7$

10. La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados 53. Hallar los números.
    Respuesta: 7 2

11. Un número es el triplo de otro y la diferencia de sus cuadrados es 1800. Hallar los números.
    Respuesta: 15, 45

12. Hallar 2 números consecutivos tales que el cuadrado del mayor exceda en 57 al triplo del menor.
    Respuesta: 8, 9

13. La diferencia de dos números es 7 y su suma multiplicada por el número menor equivale a 184. Hallar los números.
    Respuesta: N^{ro} mayor, 15; N^{ro} menor, 8

14. Una persona compró cierto número de libros por 180 \$. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado1 \$ más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costó cada una?
    Respuesta: 36 libros y 5 \$

15. Una compañia de 180 hombres está dispuesta en filas. El número de soldados de cada fila es 8 más que el número de filas que hay. ¿Cuántas filas hay y cuántos soldados en cada una?
    Respuesta: 10 filas; N^{ro} de soldados, 18

16. Entre cierto número de personas compran un auto que vale 1200 \$. El el dinero que paga cada persona excede en 194 al número de persona. ¿Cuántas personas compraron el auto?
    Respuesta: 6

17. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad hubiera sido 20 km por hora más que la que llevaba hubiera tardado 2 horas menos en recorrer dicha distancia. ¿En qué tiempo recorrió los 240 km?
    Respuesta: 6 h.

18. Un hombre compro cierto número de naranjas por 7.50 bolivianos se comió 5 naranjas y vendiendo las restantes a 20 ctvos. más de lo que le costó cada una recupero lo que había gastado. ¿Cuántas naranjas compró

y a qué precio?

19. El producto de dos números es 352, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 10. Hallar los números.
Respuesta: 32 y 11

20. Se han comprado 2 piezas de tela que juntas miden $20\,m$. El metro de cada pieza costó un número de bolivianos igual al número de metros de la pieza. Si una pieza costó 9 veces lo que la otra, ¿Cuál era la longitud de cada pieza?

21. Un hombre ha ganado 84 \$ trabajando cierto número de días, si su jornal diario hubiera sido 1 \$ menos, tendría que haber trabajado 2 días más para ganar 84 \$, ¿cuántos días trabajó y cuál es su jornal?
Respuesta: Dias trabajado, 12; Valor del joranal, 7 \$

22. Los gastos de una excursión son 90 \$. si desisten de ir 3 personas, cada una de las restantes tendría que pagar 1 \$ más. ¿Cuántas personas van en la excursión y cuánto paga cada una?
Respuesta: Personas que van 18; Valor de pago, 5 \$

23. La edad de Roberto hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Hallar la edad actual.
Respuesta: Edad actual 10 años

3.7. PROGRESIONES

3.7.1. Progresiones aritméticas. Progresiones geométricas

3.7.2. Término enésimo. Suma de una progresión

3.7.3. Problemas con progresiones

3.7.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Cuántos términos hay que tomar de la progresión aritmética

$$5;9;13;17;\ \ldots$$

para que la suma valga 10.877?
Respuesta: 73 Términos

2. Hallar una progresión aritmética sabiendo que la suma de sus cuatro términos es igual a 26 y el producto de sus mismos términos vale 880
Respuesta: El problema tiene 4 soluciones:
(1) 2; 5; 8, 11; 14; . . .
(2) 11; 8; 5, 2; −1; . . .
(3) $\dfrac{13-\sqrt{1609}}{2}; \dfrac{39-\sqrt{1609}}{6}; \dfrac{39+\sqrt{1609}}{6}, \dfrac{13+\sqrt{1609}}{2}; \ldots$
(4) $\dfrac{13+\sqrt{1609}}{2}; \dfrac{39+\sqrt{1609}}{6}; \dfrac{39-\sqrt{1609}}{6}, \dfrac{13-\sqrt{1609}}{2}; \ldots$

3. Hallar la suma de todos los números naturales de dos cifras.
Respuesta: 4905

4. Una progresión aritmética tiene 20 términos. La suma de los términos que ocupan lugares pares vale 250 y las de los términos que ocupan lugares impares vale 220. Hallar los términos centrales de la progresión.
Respuesta: Los términos centrales son iguales, respectivamente a 22 y 25

5. hallar una progresión aritmética en la que la suma de un número cualquiera de términos sea siempre el triple del número de términos elevado al cuadrado.
Respuesta: 3; 9; 15; 21; . . .

6. Hallar la suma de todos los números de dos cifras que, al dividirlos por 4, den como resto la unidad.
Respuesta: 1210

7. En una P.A se sabe que la suma de los "a" primeros términos, es la suma de los "b" primeros como "a" es a "b" . Dar la razón de la progresión, siendo $a \neq b$.

A) a B) b C) $a+b$ D) $a-b$ E) 0

8. Hallar tres números en progresión geométrica sabiendo que la suma del primero y el tercero es igual a 52 y que el cuadrado del segundo es 100.
Respuesta: (1) 50; 10; 2 o (2) 50; −10; 2, o los mismos números en orden inverso

9. Hallar cuatro números en progresión geométrica tales que la suma de los extremos valga 27 y el producto de los medios sea igual a 72
Respuesta: 3; 6; 12; 24. o en orden inverso 24; 12; 6; 3.

10. Hallar cuatro números en progresión geométrica sabiendo que la suma de los extremos es igual a 35 y la suma de los medios es igual a 30.
    Respuesta: 8; 12; 18; 27.

11. Hallar el primer término y la razón de una progresión geométrica que consta de nueve términos, tales tales que el producto de sus extremos sea igual a 2.304 y la suma de los términos cuarto y sexto sea igual a 120
    Respuesta: (1) $u_1 = 3; q = 2$ (2) $u_1 = -3, q = -2$ (3) $u_3 = 768; q = \dfrac{1}{2}$ (4) $u_4 = -768; q = -\dfrac{1}{2}$

12. Hallar a_n y s_n en la progresión geométrica $2, 4, 8, \ldots$ hasta 10 términos.
    Respuesta: $1024; 2046$

13. Hallar a_n y s_n en la progresión geométrica $1, 4, 16, \ldots$ hasta 7 términos.
    Respuesta: $4096; 5461$

14. Hallar a_n y s_n en la progresión geométrica $48, 24, 12, \ldots$ hasta 6 términos
    Respuesta: $\dfrac{3}{2}; 94\dfrac{1}{2}$

15. En cada uno de los ejercicios a, b y c, se dan 3 de los 5 elementos de una proigresión geométrica. Calcular los otros dos términos

    a) $a_1 = 1, a_n = \dfrac{-32}{243}, r = -\dfrac{2}{3}$ Respuesta: $s_6 = \dfrac{135}{243}; n = 6$

    b) $a_1 = 2, a_6 = 64, n = 6.$ Respuesta: $r = 2; s_6 = 126$

    c) $r = 2, s_7 = 635, n = 7.$
    Respuesta: $a_1 = 5; a_7 = 230.$

16. Interpolar 5 medios geométricos entre $\frac{1}{8}$ y 8.
    Respuesta: $\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}, 1, 2, 4$

17. Hallar la media geométrica entre x^2 y y^2
    Respuesta: xy

18. El tercer término de una progresión geométrica es 3, y el séptimo término es 3/16. Calcular la razón y el primer término.
    Respuesta: $r = \frac{1}{2}, a_1 = 12$

19. El tercer término de una progresión geométrica es 9 y el sexto término es 243 .Hallar el séptimo término y la suma de los primeros seis términos.
    Respuesta: $a_7 = 729; s_6 = 364$.

20. Un recipiente contiene 36 litros de alcohol puro. Se sacan seis litros y se reemplazan con agua. Si esta operación se efectúa seis veces, calcular la cantidad de alcohol puro que queda en el recipiente.
    Respuesta: $12\frac{73}{1273}$lts.

21. La media aritmética de dos números positivos diferentes es 5 y su media geométrica es 4. Calcular los números.
    Respuesta: $2, 8$.

Capítulo 4

GEOMETRÍA

La geometría estudia objetos denominados figuras geométricas que son simplificaciones de formas que aparecen en la naturaleza. A lo largo de siglos se fueron acumulando diferentes resultados acerca de las figuras geométricas las que fueron estructurados en un conjunto de resultados denominados axiomas y teoremas; habiéndose usado como instrumento de obtención de resultados el método deductivo de razonamiento. Sin embargo, la traducción de esos resultados aplicados a figuras concretas pueden describirse empleando instrumentos como la regla y el compás.

El objetivo del estudio de la geometría como preparación al ingreso para realizar estudios universitarios, se refiere sobre todo a familiarizarse con los resultados más importantes conocidos como teoremas; y en algunos casos especiales es recomendable la comprensión de los fundamentos o causas que dan lugar a dichos teoremas. Es recomendable emplear en la resolución de problemas instrumentos como la regla y el compás; apoyados en algunos puntos con razonamientos deductivos.

Como otro objetivo del estudio de la geometría es el de resolver problemas relativos a la determinación de figuras desconocidas (incógnitas) a partir de una información consistente también de figuras (datos) a través del uso de teoremas y relaciones entre teoremas empleando para ello razonamientos deductivos; habilidad que sustentará con mucho el aprendizaje de asignaturas específicas correspondientes a carreras del área de las ciencias y la tecnología.

4.1. NOCIONES PRELIMINARES

4.1.1. Axiomas ,postulados,teoremas

4.2. TEORÍA - EJEMPLOS

4.2.1. Reseña histórica:

El término Geometría deriva de dos voces $GEO = TIERRA$, $METREIN = MEDIDA$; medida de la tierra.

El origen de la geometría se debe a la necesidad del hombre de medir las tierras, específicamente en Egipto lugar donde los continuos desbordes del rio Nilo provocaba la desaparición de límites en los terrenos adyacentes. Razón por la cual, se hacia necesario un medio para restablecer estas demarcaciones, dando lugar a la que posteriormente sería una ciencia.

Entre los sabios que enriquecieron el conocimiento y desarrollo de la gemetría tenemos:
Tales de Mileto (640 años A.C.)
Pitágoras de Samos (569-470 A.C.)
Euclides (384-275 A.C.)
Platón (Siglo IV A.C.)
Arquímedes de Sisacusa (287-212 A.C.)

TÉRMINOS MATEMÁTICOS:
En matemáticas se emplean muchos términos matemáticos, entre los mas importantes se tiene:

Proposición Matemática: Se llama proposición matemática al conjunto de palabras que afirman o niegan propiedades matemáticas.

Axioma: Es una proposición evidente que no necesita ser demostrada.

Ejemplo: El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
Postulado: Es una proposición que se admite sin demostración.
Ejemplo: Por dos puntos pasa una y sola una recta.

Teorema: Es una proposición que para su aceptación es necesario demostrar, consta de dos partes hipótesis y tesis.
Hipótesis: Es la proposición inicial que se asume como verdadero.

Tesis: Es la proposición que se debe demostrar. Ejemplo: Si un triángulo es equilátero entonces es equiángulo.
Hipótesis: triángulo equilátero
Tesis: Es equiángulo

SEGMENTOS

Definiciones:

El punto: Se considera que el punto tiene posicion y carece de dimensión alguna
Línea: Es un caso particular de un conjunto de puntos que carece de anchura y espesor
Línea recta: Es aquella línea longitudinal alineada en una misma dirección
Semirrecta: Es cada una de las partes en que queda dividida una línea recta mediante un punto
Puntos Colineales: Son puntos que pertenecen a una misma recta
Línea Poligonal : Conjunto de dos o mas segmentos consecutivos trazadas en direcciones diferentes
Segmento de recta: Es una porción de línea recta limitada por dos puntos
Segmentos Congruentes: Son aquellos que tienen igual longitud

Propiedades:

P.1 El segmento total es igual a la suma de sus partes
P.2 El segmento total es mayor que cualquiera de sus partes
P.3 Toda recta que pasa por el punto medio de un segmento se dice que biseca al segmento dado

Definiciones:

Ángulo es una porción del plano determinado por dos semirrectas que tienen un punto común
Elementos de un ángulo:

Vértice: Es el punto común de las semirrectas
Lados: Son las semirrectas

Clasificación de ángulos:
a) **Por su magnitud**

Ángulo nulo: Su medida es igual a cero grados

Ángulos agudos: Son aquellos ángulos menores que 90^o
Ángulos Rectos: Son aquellos cuyo ángulo es igual 90^o
Ángulo Obtusos: Son aquellos ángulos mayores que 90^o
Ángulos llanos: Son aquellos cuyo ángulo es igual 180^o
b) **Según su característica**

- **Ángulos Complementarios:** Son dos ángulos cuya suma es igual a 90^o
- **Ángulos Suplementarios:** Son dos ángulos cuya suma es igual a 180^o

c) **Según su posición**

Ángulos consecutivos o contiguos: Tienen el mismo vértice y un lado común
Ángulos adyacentes: Son dos ángulos consecutivos y suplementarios
Ángulos opuestos por el vértice: Son los ángulos cuyos lados son semirrectas opuestas
Bisectriz de un ángulo: Es la semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales
Propiedades de Ángulos:
P.1 Los complementos de un mismo ángulo son iguales
P.2 Los suplementos de un mismo ángulo son iguales
P.3 Los ángulos opuestos por el vértice son iguales

Definición 4.2.1 *(Rectas paralelas): Dos rectas son paralelas, cuando estando en un mismo plano no tienen ningún punto común*

Definición 4.2.2 *(Recta transversal) Es una recta que intersecta a dos o mas rectas en puntos diferentes*

Paralelos y secantes

Teorema 4.2.3 *Dos ángulos que tienen sus lados perpendiculares, son iguales o suplementarios.*

Teorema 4.2.4 *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales o suplementarios.*

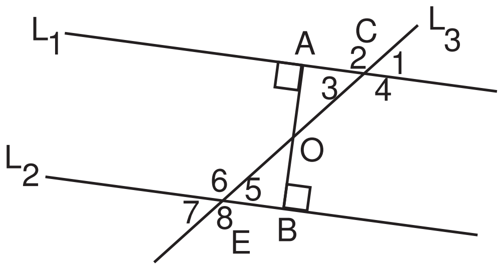

Figura 4.1:

Teorema 4.2.5 *Los ángulos alternos internos son iguales* $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$ *(véase Figura 4.1)*

Teorema 4.2.6 *Los ángulos correspondientes son iguales* $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$ *(véase Figura 4.1)*

Teorema 4.2.7 *Los ángulos alternos externos son iguales.* $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 7$ *(véase Figura 4.1)*

Teorema 4.2.8 *Los ángulos conjugados internos son suplementarios.* $\angle 3 + \angle 6 = 180^o$, $\angle 4 + \angle 5 = 180^o$ *(véase Figura 4.1)*

Teorema 4.2.9 *Los ángulos conjugados externos son suplementarios.* $\angle 2 + \angle 7 = 180^o$, $\angle 1 + \angle 8 = 180^o$ *(véase Figura 4.1)*

TRIÁNGULOS

Definición 4.2.10 *(Triángulo) Es una porción del plano limitado por tres rectas que se cortan de dos en dos.*

(véase Figura 4.2 página 120)

α, β, γ; *Ángulos interiores*	A, B, C : *Vértices*
x, y, z: *Ángulos exteriores*	$\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{CB}$: *Lados*

Clasificación

Por sus lados:

a) **Triángulo equilátero:** Tienen tres lados iguales
b) **Triángulo escaleno:** Tienen tres lados desiguales
c) **Triángulo Isósceles:** Tienen dos lados iguales y uno desigual

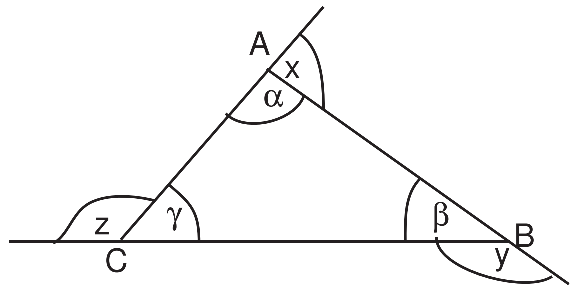

Figura 4.2:

Por sus ángulos:
a) **Triángulo Rectángulo:** Tienen un ángulo recto
b) **Triángulo obtusángulo:** Tienen un ángulo obtuso
c) **Triángulo acutángulo:** Tienen tres ángulos agudos

Teorema 4.2.11 *La suma de los ángulos interiores de un triángulos es de* 180^o *grados*

Teorema 4.2.12 *En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes*

Teorema 4.2.13 *La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a* 360^o

Teorema 4.2.14 *En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Teorema 4.2.15 *Cada ángulo de un triángulo equilátero es igual a* 60^o

Teorema 4.2.16 *Cada ángulo agudo de un triángulo rectángulo isósceles es igual a* 45^o

LÍNEAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Definición 4.2.17 *(Mediana) Es el segmento de recta trazada desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto de un triángulo.*

El punto de intersección de las 3 medianas se llama Baricentro

Definición 4.2.18 *(Bisectriz) Es el segmento de recta que divide en dos partes iguales el ángulo interior de todo triángulo.*
El punto de intersección de las bisectrices se llama Incentro.

Definición 4.2.19 *(Mediatriz) Es el segmento de recta perpendicular trazada en el punto medio de cada lado del triángulo.*
El punto de intersección de las mediatrices se llama Circuncentro

Definición 4.2.20 *(Altura) Es el segmento de recta perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto.*
El punto de intersección de las 3 *alturas se llama Ortocentro.*

Congruencia de triángulos

Definición 4.2.21 *Dos o mas triángulos son congruentes cuando tienen la misma forma y tamaño. Por lo tanto si dos triángulos son congruentes sus lados y sus lados correspondientes (homólogos) son iguales.*

La congruencia de triángulos se indica por: "$\cong$".
Por ejemplo: El triángulo ABC es congruente al triángulo $A'B'C'$, se denota: $\triangle ABC \cong \vartriangle A'B'C'$ (ver Figura 4.3)

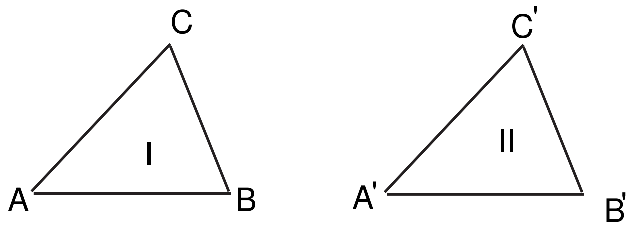

Figura 4.3:

Criterios de congruencia de triángulos
La congruencia de dos triángulos implica la igualdad respectiva de sus 6 elementos.
Criterio 1.- Dos o mas triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales (L.A.L.) (véase Figura 4.4 página 122)

Criterio 2.- Dos o mas triángulos son congruentes si tienen un lado igual y dos ángulos adyacentes a el, respectivamente iguales (A.L.A.) (ver Figura 4.5)

Criterio 3.- Dos o mas triángulos son congruentes si tienen los tres lados de un triángulo iguales a los correspondientes lados del otro triángulo(L.L.l.) (ver

$\triangle I \cong \triangle II$

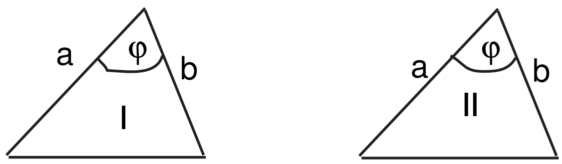

Figura 4.4:

$\triangle I \cong \triangle II$

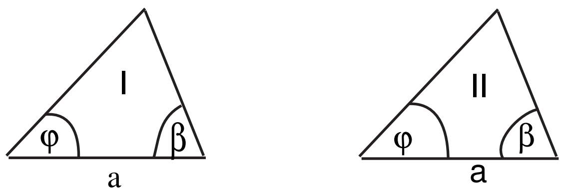

Figura 4.5:

$\triangle I \cong \triangle II$

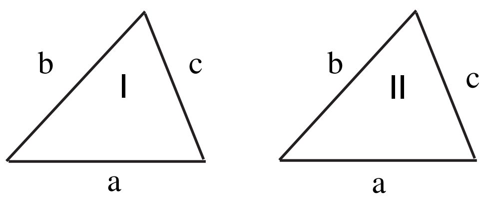

Figura 4.6:

Figura 4.6)

Criterio 4.- Dos triángulos rectángulos son congruentes cuándo tienen respectivamente iguales un ángulo agudo y un cateto (A.C.) (ver Figura 4.7 página 123)

$\triangle I \cong \triangle II$

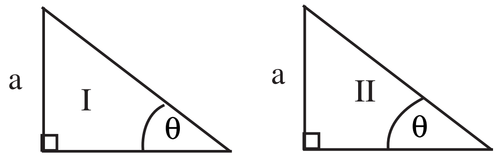

Figura 4.7:

Criterio 5.- Dos triángulos rectángulos son congruentes cuándo tienen respectivamente iguales los dos catetos (C.C.) (ver Figura 4.8 página 123)

$\triangle I \cong \triangle II$

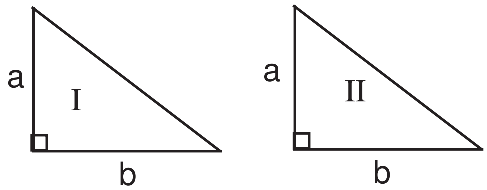

Figura 4.8:

Criterio 6.- Dos triángulos rectángulos son congruentes cuándo tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un ángulo agudo (H.A.) (ver Figura 4.9)

$\triangle I \cong \triangle II$

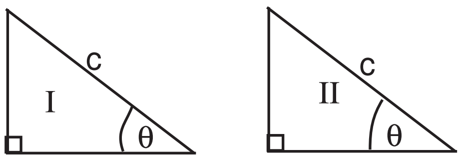

Figura 4.9:

Criterio 7.- Dos triángulos rectángulos son congruentes cuándo tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto (H.C.) (ver Figura 4.10 página 124)

$\triangle I \cong \triangle II$

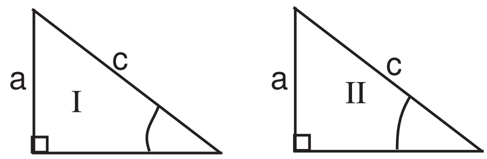

Figura 4.10:

Teorema 4.2.22 *En todo triángulo isósceles, se traza la altura relativa al lado desigual, el triángulo quedara dividido en dos triángulos rectángulos parciales congruentes entre si:*

Teorema 4.2.23 *En todo triángulo isósceles a lados iguales se oponen ángulos iguales entre sí:*

Teorema 4.2.24 *todo triángulo equilátero es equiángulo*

Propiedades de la bisectriz

Teorema 4.2.25 *Todo punto situado sobre la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados.*

Propiedades de la mediatriz

Teorema 4.2.26 *Todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.*

Paralela media en un triángulo

Teorema 4.2.27 *Si desde el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela a otro lado , está paralela pasa por el punto medio del segundo lado y es igual a la mitad del tercer lado.*

Teorema 4.2.28 *El ángulo formado por la mediana y la altura trazada desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, es igual a la diferencia de los ángulos agudos*

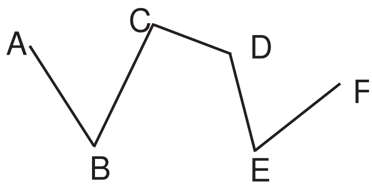

Figura 4.11:

Polígonos

Definición 4.2.29 *(Línea quebrada) Es un conjunto de segmentos de rectas que siguen direcciones distintas. (ver Figura 4.11 página 125)*

Definición 4.2.30 *(Lineal poligonal) Es una línea quebrada que se cierra sobre si misma*

Definición 4.2.31 *Polígono es la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada (figura formada por tres o mas segmentos que se cortan de dos en dos).*

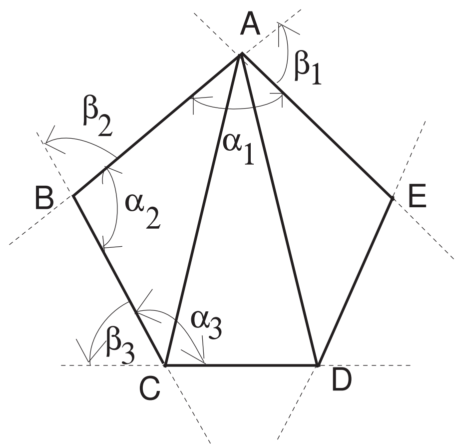

Figura 4.12:

Elementos del polígono
(véase Figura 4.12)
Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}, \overline{CD}; \overline{DE}$
Vértices: $A, B, C, D, etc.$
Ángulos interiores: Son los ángulos formados por dos lados consecutivos.

Ejemplo 4.1 *. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ...etc.$ (véase Figura 4.12)*

Ángulos exteriores: Son los ángulos formados por un lado y la prolongación del lado consecutivo sobre los vertices. Ejem. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, etc.$
Diagonales: Son líneas rectas que unen dos vértices no consecutivos. Ejem AD, AC
Perímetro de un polígono.- Es la longitud total de su contorno o suma de sus lados
Observación
El número de lados es igual al número de vertices.
El número de triángulos formados a partir de un vértice es igual a $(n - 2)$ donde n: número de lados

Clasificación

Por el número de sus lados:

De acuerdo al número de lados, los polígonos pueden ser:

Triángulos de tres lados, cuadriláteros de cuatro lados, Pentágonos de cinco lados, Hexágonos de seis lados, Heptágonos de siete lados, Octágonos de ocho lados, Nonágonos de nueve lados, Decágonos de diez lados, Pentadecágonos, Dodecágonos.

Por la forma de su entorno

a) **Polígono Convexos:** Cuando al atravesarlos una recta lo corta en dos puntos.

b) **Polígono Cóncavos:** Cuando una recta al atravesarlos lo corta en mas de dos puntos.

c) **Polígono plano:** Cuando todas sus partes se hallan en un mismo plano.

d) **Polígono equilátero:** Cuando todos sus lados son iguales entre si

e) **Polígono equiángulo:** Cuando tienen todos sus ángulos iguales

f) **Polígono regular:** Los polígonos son regulares cuando todos sus lados y sus ángulos son iguales.

g) **Polígono irregular:** Son polígonos Irregulares si sus lados y sus ángulos son diferentes.

Propiedades de los polígonos

Teorema 4.2.32 *La suma S_i de los ángulos interiores de un polígono cóncavo ó convexo de n lados es igual a $(n-2)$ ángulos llanos.*

Teorema 4.2.33 *El valor de un solo ángulo interior de un polígono convexo regular de n lados es:*

$$\alpha = \frac{180^o\ (n-2)}{n}$$

Teorema 4.2.34 *La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es igual a 4 ángulos rectos.*

$$S_\beta = 360^o$$

Teorema 4.2.35 *El valor de un solo ángulo exterior de un polígono regular convexo de n lados es:*

$$\beta = \frac{360°}{n}$$

Teorema 4.2.36 *La suma de los ángulos centrales de un polígono regular es igual a cuatro angulos rectos*

$$S_\theta = 360^o$$

Teorema 4.2.37 *El valor de un solo ángulo central de un poligono regular de n lados es:*

$$\theta = \frac{360°}{n}$$

Teorema 4.2.38 *El número de diagonales que pueden trazarse desde un vértice en un polígono es igual al número de lados menos tres*

$$d = n - 3$$

Teorema 4.2.39 *El número total de diagonales de un polígono de n lados es:* $D_T = \dfrac{n\,(n-3)}{2}$

Cuadriláteros

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados (ver Figura 4.13 página 129)

Elementos del cuadrilátero

(Véase Figura 4.13 página 129)

A, B, C, D : Vertices $\quad$ $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$: Lados

α : Ángulo interno $\quad$ β Ángulo externo.

Los cuadriláteros son polígonos convexos de cuatro lados, se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

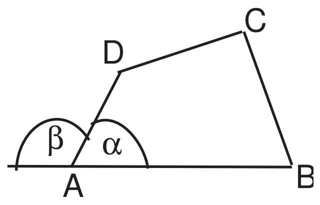

Figura 4.13:

Paralelogramos: Son cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos. Se clasifican en:

Romboide: Es un paralelogramo que tiene sus ángulos y sus lados opuestos iguales dos a dos. Llamado comúnmente paralelogramo
Rombo : Es un paralelogramo que tiene sus 4 lados iguales y sus ángulos opuestos iguales dos a dos. Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos y perpendiculares entre si; una se llama diagonal mayor y la otra diagonal menor.
Rectángulo : Es un paralelogramo que tiene sus 4 ángulos iguales y rectos y sus lados opuestos iguales dos a dos. Las diagonales de un rectángulo son iguales.
Paralelogramo cuadrado.- Es un paralelogramo que tiene sus 4 ángulos iguales y rectos y sus 4 lados iguales. Las diagonales del cuadrado son perpendiculares entre si y bisecan a los ángulos del cuadrado.

Propiedades de los paralelogramos

Propiedad 1: En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.
Propiedad 2: En todo paralelogramo los ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios.
Propiedad 3: En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales.
Propiedad 4: En todo paralelogramo las diagonales se cortan mú tuamente en partes iguales.
Propiedad 5: Las diagonales de un rectángulo son iguales.
Propiedad 6: Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre si y bisectrices de sus ángulos.
Propiedad 7: Las diagonales de un cuadrado son iguales, perpendiculares y bisectrices de sus ángulos.
Propiedad 8: En todo cuadrilátero la suma de sus ángulos interiores es igual a 360^o

Definición 4.2.40 *(Trapecio) Son cuadriláteros que tienen dos lados opuestos paralelos llamados bases del trapecio y dos lados no paralelos.(ver Figura 4.14 página 130)*

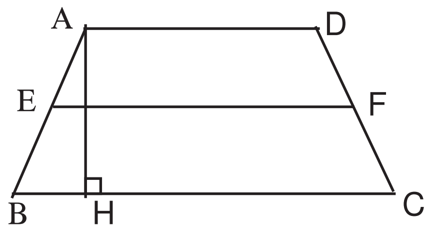

Figura 4.14:

Así en el trapecio $ABCD$: $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ son bases (Ver Figura 4.14)
Mediana de un trapecio: Es el segmento de recta $\overline{EF}$ (Ver Figura 4.14 página 130) que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio $ABCD$.
Altura de un trapecio: Es la distancia $\overline{AH}$ (Ver Figura 4.14) que existe entre las dos bases del trapecio $ABCD$.
Los trapecios se clasifican en.
a) **Trapecio escaleno**.- Es aquel que tiene sus lados no paralelos desiguales.
b) **Trapecio Isósceles**.- Es aquel que tiene sus lados no paralelos iguales.
c) **Trapecio rectángular**.- Es aquel que tiene dos ángulo rectos

Propiedades de los trapecios

Paralela media de un trapecio
Es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.
Propiedad 1.- La mediana de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases.
Propiedad 2.- En todo trapecio el segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales es igual a la semidiferencia de las bases.
Propiedad 3: Los ángulos adyacentes a una misma base de un trapecio isósceles son iguales y los ángulos opuestos son suplementarios.
Propiedad 4.- Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.

Proporcionalidad

Razón de dos segmentos

La razón entre dos segmentos es la comparación por cociente entre las medidas de dichos segmentos expresados en la misma unidad. Así : (ver Figura 4.15 página 131)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

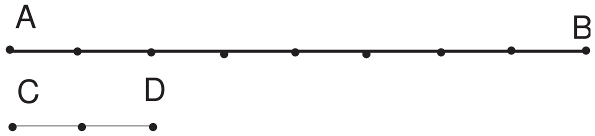

Figura 4.15:

Segmentos proporcionales

Dos segmentos rectilíneos son proporcionales a otros dos cuando lo son sus valores numéricos. Así, si tenemos los segmentos: $\overline{AB} = 4u$ y $\overline{CD} = 5u$, $\overline{MN} = 8u$ y $\overline{RS} = 10u$, tenemos la proporción:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{RS}}$$

En general, si $\overline{AB} = a$ y $\overline{CD} = b$, $\overline{MN} = c$ y $\overline{RS} = d$, se tiene la proporción geométrica $a/b = c/d$

$$\text{clases} \begin{cases} \text{directa} & \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}, \quad b \neq c \qquad b \neq 0, \quad d \neq 0 \\ \text{continua} & \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{d}, \quad b = c \\ \text{inversa} & \dfrac{a}{b} = \dfrac{d}{c} \qquad\qquad c \neq 0 \\ \text{reciproca} & \dfrac{a}{c} = \dfrac{d}{b} \end{cases}$$

Cuarto, tercero y medio proporcionalidad.

Se llama "cuarto proporcional" respecto de tres segmentos a, b y c a un segmento "x" que cumple con la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Se llama "tercero proporcional" respecto de dos segmentos a, b a un segmento "x" que cumple la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Se llama "medio proporcional" respecto de dos segmentos a, b a un segmento "x" que cumple la condición:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

de donde: $x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$

Proporcionalidad de segmentos

Teorema 4.2.41 *Si varias paralelas determinan segmentos iguales en una de dos transversales cualquiera, determinarán también segmentos iguales entre sí en la otra transversal.*

Teorema 4.2.42 *(Teorema de Thales) Si varias paralelas son cortadas por 2 transversales o secantes, entonces determinan en ellas segmentos proporcionales.*

Teorema 4.2.43 *Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos en segmentos proporcionales.*

Semejanza de triángulos

Definición 4.2.44 *Dos triángulos cualesquiera son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.*

Ángulos homólogos.- Son los ángulos respectivamente iguales.
Lados homólogos.- Son los lados opuestos a ángulos iguales de dos triángulos semejantes.
Razón de semejanza.- Es la relación de dos lados homólogos cualesquiera.
El signo de semejanza es "$\sim$" y se lee "semejante a".
La semejanza de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ se denota:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$

Se lee: "triángulo ABC es semejante al triángulo MNP :
Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

Teorema 4.2.45 *Toda paralela a un lado de un triángulo forma, con los otros dos lados, un triángulo parcial semejante al total.*

Criterios de semejanza de triángulos

Para que dos triángulos sean semejantes se debe cumplir uno de los siguientes casos:

Criterio 1: Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales. (ver Figura 4.16 página 133)

Hipótesis
Sean ΔABC, y ΔDEF
$\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$
$\measuredangle BCA = \measuredangle EFD$

Tesis
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

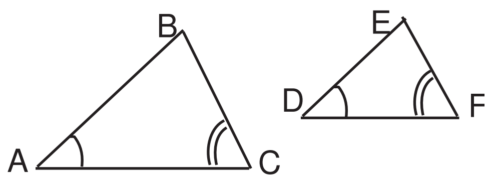

Figura 4.16:

Criterio 2: Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales. (ver Figura 4.17)

Hipótesis
Sean ΔABC, y ΔDEF
$\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Tesis
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

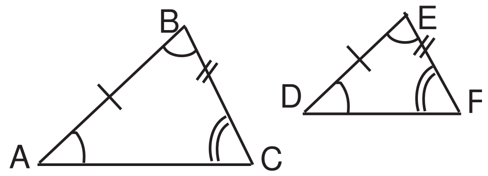

Figura 4.17:

Criterio 3: Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados proporcionales. (ver Figura 4.18 página 134)

Hipótesis
Sean ΔABC, y ΔDEF
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Tesis
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

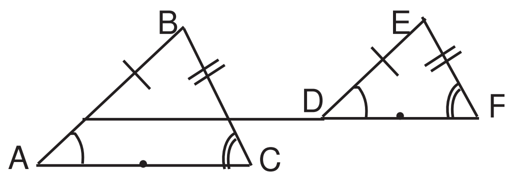

Figura 4.18:

Criterios particulares
a) Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual. (ver Figura 4.19)

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\measuredangle ACB = \measuredangle DFE$$

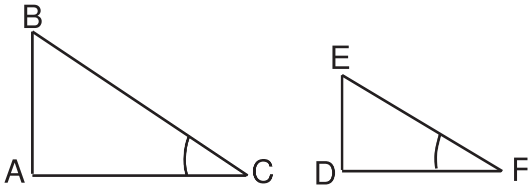

Figura 4.19:

b) Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales. (ver Figura 4.20 página 135)

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

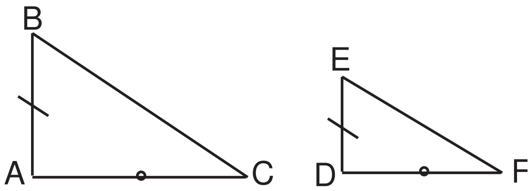

Figura 4.20:

c) Dos triángulos isósceles son semejantes cuando tienen el ángulo del vértice igual, ó uno de los de la bases iguales.
d) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
e) Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares.

Teorema 4.2.46 *En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados contiguos del triángulo.*

Teorema 4.2.47 *En todo triángulo la bisectriz de un ángulo exterior divide a la prolongación del lado opuesto en dos segmentos proporcionales con respecto a los lados contiguos del triángulo.*

Relaciones métricas en un triángulo rectángulo

Si en un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH desde el ángulo recto, se tiene que el segmento m es proyección del cateto c y el segmento n es proyección del cateto b.
Elementos del triángulo rectángulo: (ver figura4.21)

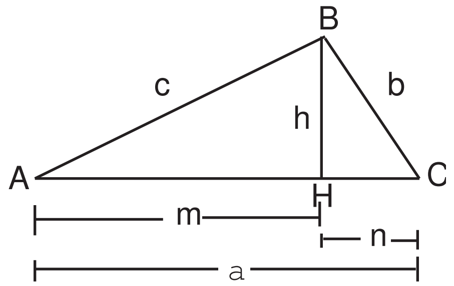

Figura 4.21:

$\overline{AB} = c, \overline{BC} = b$: catetos
$\overline{AC} =$ a : hipotenusa
$\overline{BH} = h$: Altura relativa a la hipotenusa.
$\overline{AH} = m$: Proyección de c sobre la hipotenusa.
$\overline{HC} = n$: Proyección de b sobre la hipotenusa.

Teorema 4.2.48 *En un triángulo rectángulo si se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, se forman 2 triángulos semejantes entre si y cada uno semejante al triángulo dado.*

Teorema 4.2.49 *En todo triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.*

Teorema 4.2.50 *En todo triángulo rectángulo el producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura correspondiente a ella.*

Teorema 4.2.51 *En todo triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.*

Teorema de Pitágoras

Teorema 4.2.52 *En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

Relaciones en triángulos rectángulos notables

- Si los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son de 30 y 60, . entonces
- El cateto opuesto al ángulo de 60° vale la mitad de la hipotenusa por la raíz cuadrada de tres .
- El cateto opuesto al ángulo de 30^o es igual a la mitad de la hipotenusa.

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Definiciones

Circunferencia.- Es el conjunto de puntos que están en un mismo plano y que equidistan de otro punto del mismo plano llamado centro.
Círculo.- Es la porción interior del plano limitado por una circunferencia.
Elementos de la circunferencia
Se tiene:
(ver Figura 4.22 página 137)

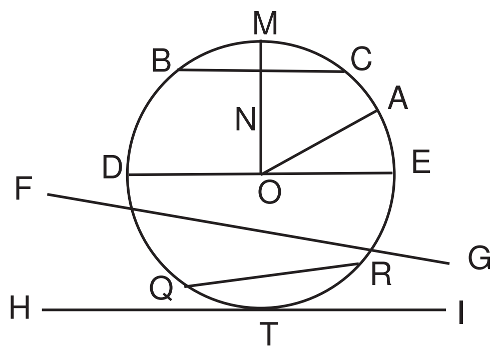

Figura 4.22:

$\overline{OA}$: Radio	$\overline{HI}$: Tangente	$\overline{BC}$, $\overline{QR}$: Cuerdas
$\overline{FG}$: Secante	O: Centro	$\overline{DE}$: Diámetro
$\widehat{AE}$: Arco		

Propiedades de la circunferencia

Propiedad 1: En toda circunferencia, a arcos iguales corresponden cuerdas iguales.
Propiedad 2: En toda circunferencia las cuerdas iguales equidistan del centro.
Propiedad 3: Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a la cuerda y al arco que subtiende en dos partes iguales.
Propiedad 4: Los arcos de una circunferencia comprendidos entre dos cuerdas paralelas son iguales.

Propiedades de las tangentes a una circunferencia

Definición 4.2.53 *Tangente de una circunferencia es la perpendicular al radio en el punto de tangencia.* *(ver Figura 4.23 página 138)*

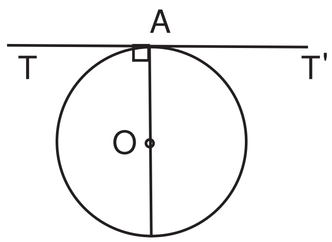

Figura 4.23:

Propiedad 1: La tangentes trazadas desde un punto exterior a un circunferencia son iguales.
Propiedad 2: Las tangentes interiores comunes a dos circunferencias son iguales.
Propiedad 3: La tangentes exteriores comunes a dos circunferencias son iguales.
Cuadrilátero inscrito en una circunferencia

Cuadrilátero inscrito en una circunferencia es aquel cuadrilátero que tiene sus vértices en la circunferencia. Por ejemplo, el cuadrilátero $ABCD$ es inscrito a la circunferencia.

Ángulos y medidas en la circunferencia
Ángulo central.-

Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y como lados dos radios de la misma.

Ángulo inscrito.- Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.
Su Medida, es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados. (ver Figura 4.24 página 139)

Hipotesis: $\measuredangle ABC$
Sea x el ángulo inscrito y
$\widehat{AC}$ el arco que subtienden
sus lados$\measuredangle ABC = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$

Tesis
$\widehat{x} = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$

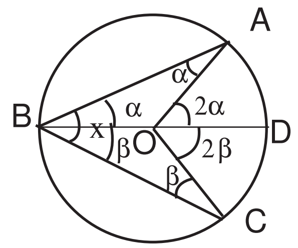

Figura 4.24:

Ángulo semi-inscrito.- Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una tangente.
Su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Ángulo interior.- Es el ángulo que tiene su vértice dentro de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas que se cortan.
Ángulo exterior.- Es el ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados son dos secantes y/o dos tangentes o una secante y una tangente.
Ángulo Ex-inscrito.- Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una secante. Su medida es la semisuma de los arcos determinados por la cuerda y la secante.

Relaciones métricas en un circulo

Teorema 4.2.54 *Cuando dos cuerdas de una circunferencia se cortan el producto de los segmentos de una de ellas es igual al producto de los segmentos determinados sobre la otra.*

Teorema 4.2.55 *Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes; el producto de una secante por su segmento externo, es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.*

Teorema 4.2.56 *Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte exterior*

Teorema 4.2.57 *El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

4.3. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 4.1 *Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos* A, B, C, D, E. *si:* $\overline{AC} + \overline{BD} + \overline{CE} = 44\,m$; $\overline{AE} = 25\,m$; $\overline{DE} = 2\overline{AB}$; *Hallar la longitud del segmento* $\overline{AB}$.

Solución:

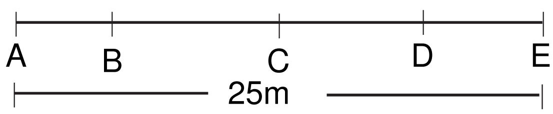

Figura 4.25: Ejercicio 4.1

$\overline{AC} + \overline{BD} + \overline{CE} = 44$
$\overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AE}$
$\overline{AE} + \overline{BD} = 44$
$25 + \overline{BD} = 44$
$\overline{BD} = 19\,m$

$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DE} = 25$
$\overline{AB} + 19 + 2\overline{AB} = 25$
$\therefore \overline{AB} = 2\,m$

Ejercicio 4.2 *Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B y C. Si: M es el punto medio de $\overline{AB}$; $\overline{AB} \cdot \overline{MC} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$; $\overline{AB} = 8\,m$.Hallar el segmento $\overline{BC}$.*

Solución:

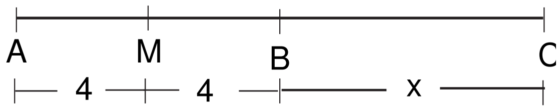

Figura 4.26: Ejercicio 4.2

$\overline{AB} \cdot \overline{MC} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$
$8(4 + x) = (8 + x)x$
$32 + 8x = 8x + x^2$
$x^2 = 32$
$\therefore x = \overline{BC} = 4\sqrt{2}\,m$

Ejercicio 4.3 *Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: $\overline{CD} = 3\overline{AB}$; $\overline{AD} + 3\overline{BC} = 60\,m$. Hallar la longitud del segmento $\overline{AC}$.*

Solución:

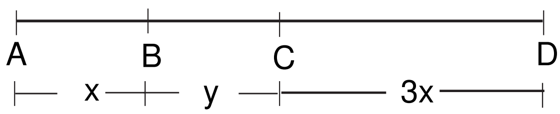

Figura 4.27: Ejercicio 4.3

$\overline{AD} + 3\overline{BC} = 60$
$4x + y + 3y = 60$

$4x + 4y = 60$

$4(x + y) = 60$
$\therefore x + y = \overline{AC} = 15\,m$

Ejercicio 4.4 *Los puntos colineales consecutivos A, B, C y D son tales que: $\overline{AD} = 18\,m$; $\overline{BD} = 13\,m$; $\overline{AC} = 12\,m$. Hallar el segmento $\overline{BC}$.*

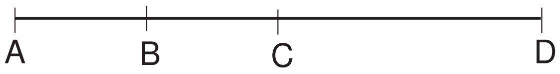

Figura 4.28: Ejercicio 4.4

Solución.-

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$
$18 = \overline{AB} + 13$
$\overline{AB} = 5\,m$

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$
$12 = 5 + \overline{BC}$
$\therefore \overline{BC} = 7\,m$

Ejercicio 4.5 *Sobre una línea recta se tienen los puntos consecutivos P, Q, R; si: $\overline{PQ} = 2\overline{QR} + 1$; $\overline{PR} = 31\,m$. Hallar el segmento $\overline{QR}$.*

Solución.-

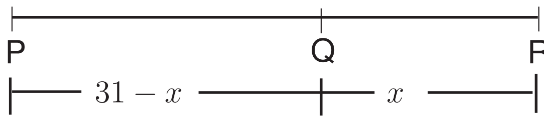

Figura 4.29: Ejercicio 4.5

$\overline{PQ} = 2\overline{QR} + 1$
$31 - x = 2x + 1$
$\therefore x = \overline{QR} = 10\,m$

Ejercicio 4.6 *A, B, C son puntos colineales y consecutivos si: $7\overline{AB} = 8\overline{BC}$; $\overline{AC} = 45\,m$. Hallar el segmento $\overline{BC}$.*

Solución.-

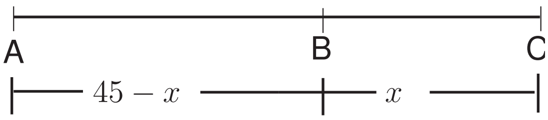

Figura 4.30: Ejercicio 4.6

$7\overline{AB} = 8\overline{BC}$
$7(45 - x) = 8x$

$315 - 7x = 8x$
$\therefore x = \overline{BC} = 21\,m$

Ejercicio 4.7 *Hallar la medida de un ángulo, sabiendo que su complemento y su suplemento forman* 208 *grados.*

Solución.- x : medida del ángulo
Complemento: $(90 - x)$
Suplemento: $(180 - x)$
$(90 - x) + (180 - x) = 208$
$\therefore \widehat{x} = 31$ grados

Ejercicio 4.8 *El doble del complemento de un ángulo mas el triple del suplemento del mismo ángulo es igual a* 500 *grados. Hallar la medida del ángulo.*

Solución.-
x : ángulo
$2(90 - x) + 3(180 - x) = 500$
$180 - 2x + 540 - 3x = 500$
$\therefore \widehat{x} = 44$ grados

Ejercicio 4.9 *El doble de la medida de un ángulo es igual al triple de la medida de su complemento. Hallar la medida del ángulo.*

Solución.-
x : ángulo
$2x = 3(90 - x)$
$\therefore \widehat{x} = 54$ grados

Ejercicio 4.10 *La suma de los complementos y suplementos de las medidas de dos ángulos es igual a* 230 *grados si la diferencia de las medidas de ambos ángulos es* 15 *grados. Calcular los ángulos ángulo.*

Solución.- sean α; β : ángulos
$(90 - \alpha) + (180 - \beta) = 230$
$\alpha + \beta = 40$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 40 \\ \alpha - \beta = 15 \end{cases} \qquad (\diamondsuit)$$

Resolviendo el sistema $(\diamondsuit)$ se obtiene los valores de α y β
$\therefore \alpha = \dfrac{55}{2}$ grados; $\beta = \dfrac{25}{2}$ grados

Ejercicio 4.11 *Si al suplemento de un ángulo se lo disminuye el el sextuplo de su complemento, resulta la mitad del ángulo. Hallar la medida del ángulo.*

Solución.-
x : ángulo

$(180 - x) - 6(90 - x) = \dfrac{x}{2}$

$180 - x - 540 + 6x = \dfrac{x}{2}$

$360 = 5x - \dfrac{x}{2}$

$\therefore \widehat{x} = 80$ grados

Ejercicio 4.12 *Si a un ángulo le aumentamos el cuadrado de su complemento se tiene un ángulo llano. Calcular el ángulo.*

Solución.-
x : ángulo

$x + (90 - x)^2 = 180$

$x^2 - 179x + 7920{=}0$

$(x - 99)(x - 80) = 0$

$\therefore \widehat{x}_1 = 80$ grados, $\widehat{x}_2 = 80$ grados

Ejercicio 4.13 *Calcular el menor ángulo que forman las bisectrices de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo.*

Solución.-

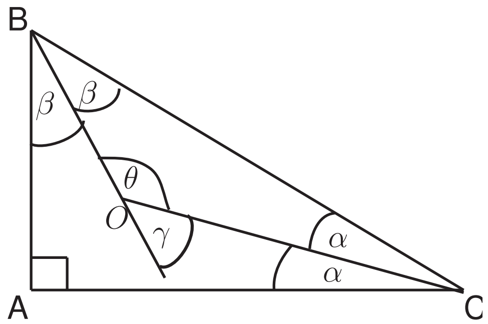

Figura 4.31: Ejercicio 4.13

$\overline{CO}$; $\overline{BO}$: Bisectrices

$2\beta + 2\alpha = 90^o$

$\beta + \alpha = 45^o$

$\beta + \alpha + \theta = 180^o$

$\theta = 180^o - (\beta + \alpha)$

$\theta = 135$

$\gamma + \theta = 180^o$

$\gamma = 180 - 135$

$\gamma = 45^o$

$\therefore$ el ángulo menor es $\gamma = 45^o$

Ejercicio 4.14 *La diferencia de los ángulos formados por las bisectrices de los ángulos adyacentes y el lado común mide 8 grados. Hallar el complemento del menor de los ángulos adyacentes.*

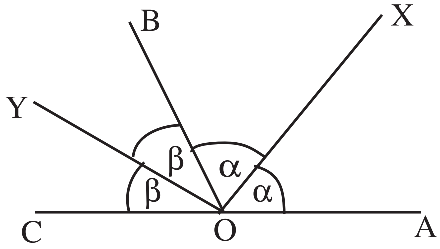

Figura 4.32: Ejercicio 4.14

Solución.-

$\overline{OX}$; $\overline{OY}$: Bisectrices

$\alpha - \beta = 8^o$

$\beta + \alpha = 90^o$

$2\alpha = 98^o$

$2\beta = 82^o$

Complemento $2\beta = 90 - 82$

$\therefore C(2\beta) = 8^o$

Ejercicio 4.15 *En el gráfico de abajo (Figura 4.33) si $L_1 \| L_2$ Hallar β*

Solución.-

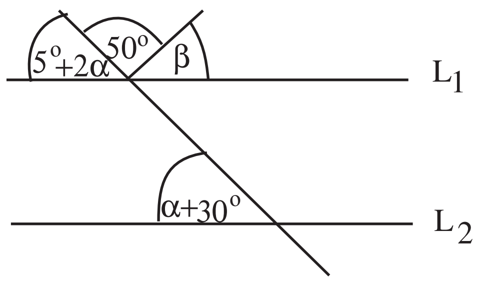

Figura 4.33: Ejercicio 4.15

$5 + 2\alpha + 50 + \beta = 180$

$2\alpha + \beta = 125$

$5 + 2\alpha = \alpha + 30$

$\alpha = 25$

$\therefore \beta = 75^o$

Ejercicio 4.16 *En la Figura 4.16: $L_1 \parallel L_2$. Hallar: "x"*

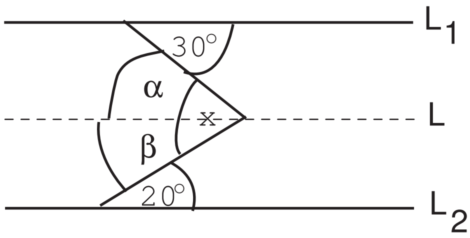

Figura 4.34: Ejercicio 4.16

Solución.-
Línea auxiliar $L \parallel L_1 \parallel L_2$ $\qquad x = \alpha + \beta$
$\alpha = 30$ $\qquad \therefore x = 50^o$
$\beta = 20$

Ejercicio 4.17 *En la Figura 4.17:* $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$; $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$. *Hallar* α, β

Solución.-

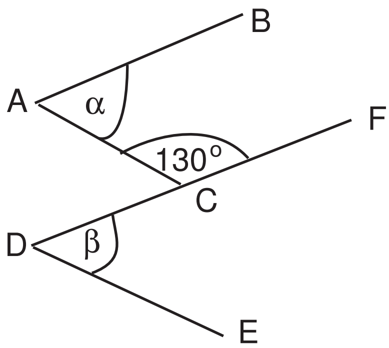

Figura 4.35: Ejercicio 4.17

$\overline{AB} \parallel \overline{CF} : \alpha + 130 = 180$ $\qquad \alpha = \beta$: Lados $\parallel s$
$\alpha = 50^o$ $\qquad \therefore \beta = 50^o$

Ejercicio 4.18 *En la Figura 4.36 (véase 4.36 página 147)* $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; $\alpha + \theta = 70^o$. *Hallar* α; β

Solución: (ver figura 4.36 página 147)
$\alpha = 30^o$ $\qquad$ $30^o + \theta = 70^o$

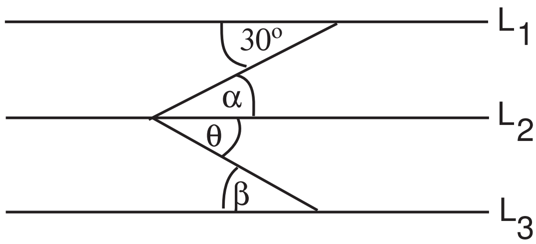

Figura 4.36: Ejercicio 4.18

$\beta = \theta$ $\qquad$ $\theta = 40^o$
$\alpha + \theta = 70^o$ $\qquad$ $\therefore \alpha = 30^o;\ \beta = 40^o$

Ejercicio 4.19 *En la Figura 4.37 (véase 4.37 página 147) $L_1 \parallel L_2$. Hallar α; β*

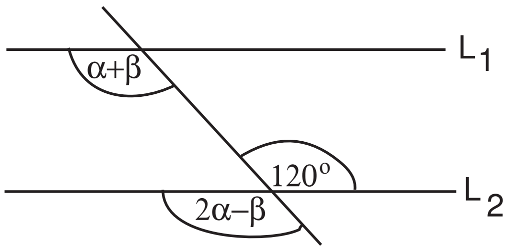

Figura 4.37: Ejercicio 4.19

Solución: (ver figura 4.37 página 147)
$\alpha + \beta = 120$ $\qquad$ $3\alpha = 240$
$2\alpha - \beta = 120$ $\qquad$ $\therefore \alpha = 80^o;\ \beta = 40^o$

Ejercicio 4.20 *Dado un triángulo ABC (Figura 4.38) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Demostrar que el $\triangle ABC$ es semejante con $\triangle ADE$.*

Demostración.-
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AED$ ángulos correspondientes

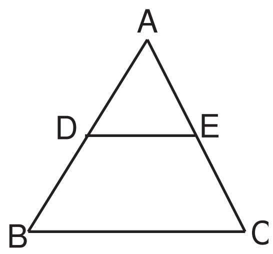

Figura 4.38: Ejercicio 4.20

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE$ ángulos correspondientes
$\sphericalangle A = \sphericalangle A$ ángulo común
$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$

Ejercicio 4.21 *Demostrar que la altura en un triángulo isósceles divide al triángulo en dos triángulos iguales (congruentes)*

Demostración:

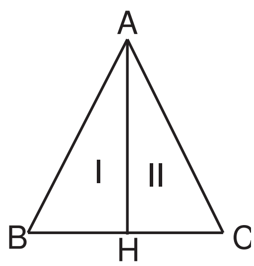

Figura 4.39: Ejercicio 4.21

1. $\overline{AB} = \overline{AC}$ por ser isósceles
2. $\overline{AH}$: Altura
3. $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ por 1.
4. $\overline{BH} = \overline{HC}$ $\quad\quad \overline{AH}$ = altura=mediatriz
   $\therefore \triangle ABH \cong \triangle AHC$

Ejercicio 4.22 *Demostrar que todo punto de la bisectriz equidista de sus lados.*

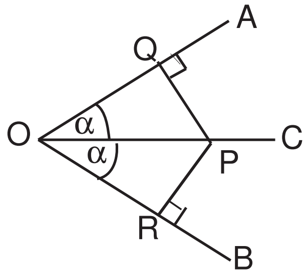

Figura 4.40: Ejercicio 4.22

Demostración:
$\overline{OC}$: Bisectriz

1. $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC$
2. $\overline{OP} = \overline{OP}$: Lado común a $\triangle OPQ$ y $\triangle ORP$
3. $\triangle PQO \cong \triangle PRO$:
4. $\overline{PQ} = \overline{PR}$

Ejercicio 4.23 *Demostrar que la diagonal de un paralelogramo divide en dos triángulos iguales.*

Demostración:

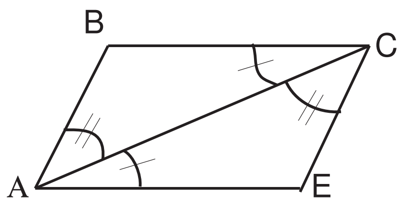

Figura 4.41: Ejercicio 4.23

$\overline{BC} \parallel \overline{AE}$
$\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCA$
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$
$\overline{AC} = \overline{ACE}$ Lado común
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEC$

Ejercicio 4.24 *Demostrar que todo punto situado sobre la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.*

Demostración:

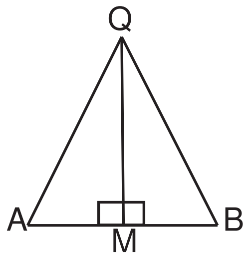

Figura 4.42: Ejercicio 4.24

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$
$\overline{QM}$: Mediatriz.
$\overline{MQ} = \overline{MQ}$ Lado común
$\overline{AM} = \overline{BM}$ Poi ser $\overline{QM}$
$\Rightarrow \triangle AQM \cong \triangle BQM$
$\therefore \boxed{\overline{AQ} = \overline{BQ}}$ Lados homólogos

Ejercicio 4.25 *La suma de los ángulos interiores de un polígono es* 720^o*. Calcular el número de lados.*

Solución:
$S = 180(n-2)$ Suma de ángulos interiores
$S = 720$ Dato
$720 = 180(n-2)$
$\therefore \boxed{n = 6 \text{ lados}}$

Ejercicio 4.26 *El ángulo interior de un polígono regular es igual a* 120^o *grados. Hallar el número de lados*

Solución:
$\alpha = \dfrac{180(n-2)}{n}$: ángulo interior
$\alpha = 120^o$ Dato
$120^o = \dfrac{180(n-2)}{n}$
$120\,n = 180\,n - 360$
$\therefore \boxed{n = 6 \text{ lados}}$

Ejercicio 4.27 *En que polígono, el número de diagonales, es igual al número de lados.*

Solución:

$\dfrac{n(n-3)}{2}$: Número de diagonales
n: Número de lados
$\dfrac{n(n-3)}{2} = n$

$n^2 - 3n = 2n$
$n^2 - 5n = 0$
$n(n-5) = 0 \therefore \boxed{n = 5}$

Ejercicio 4.28 *Cuantos lads tiene el polígono convexo donde la suma de las medidas de los ángulos interiores es* 5 *veces la suma de las medidas de los ángulos exteriores*

Solución:

$S_i = 5S_e$
$S_i = 180(n-2)$

$S_e = 360^o$
$180(n-2) = 5 \cdot 360 \Rightarrow \boxed{n = 12 \text{ lados}}$

Ejercicio 4.29 *Cuanto mide cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de 18 lados.*

Solución:

$180(n-2)$: Suma de ángulos interiores
$\widehat{i} = \dfrac{180(n-2)}{n}$: Ángulo interior
$\widehat{i} = \dfrac{180(18-2)}{18}$: Sustituyendo valores
$\therefore \boxed{\widehat{i} = 160^o}$

Ejercicio 4.30 *La suma de las medidas de los ángulos interiores de cierto polígono regular excede a la suma de los ángulos exteriores en* 900 *grados. Cuantos lados tiene el polígono*

Solución:

$S_i = S_e + 900^o$
$180(n-2) = 360 + 900$

$180n - 360 = 360 + 900$
$\therefore \boxed{n = 9 \text{ lados}}$

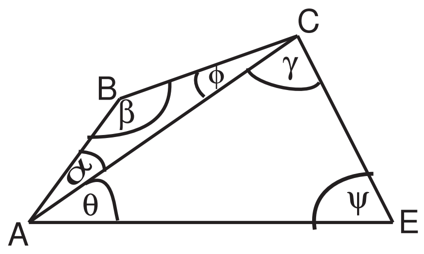

Figura 4.43: Ejercicio 4.31

Ejercicio 4.31 *Demostrar que en todo Cuadrilátero la suma de sus ángulos interiores es* 360 *grados*

Solución:

$\overline{AC}$: Línea auxiliar

$\triangle ABC : \alpha + \beta + \phi = 180$

$\triangle ACE : \theta + \gamma + \psi = 180$

$(\theta + \alpha) + (\gamma + \phi) + \beta + \psi = 360$

$\therefore \boxed{\widehat{A} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{E} = 360^o}$

Ejercicio 4.32 *En todo paralelogramo las diagonales se interceptan en su punto medio.*

Solución:

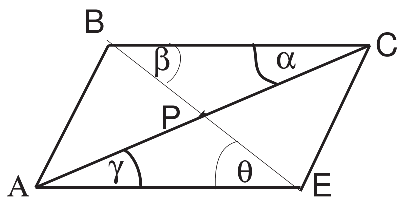

Figura 4.44: Ejercicio 4.32

$\overline{BC} \parallel \overline{AE}$

$\gamma = \alpha$

$\beta = \theta$

$\overline{BC} = \overline{AE}$

$\triangle BPC \cong \triangle APE$

$\therefore \boxed{\overline{AP} = \overline{CP}}$ lados homólogos

Ejercicio 4.33 *En un cuadrilátero se tiene :* $\widehat{B} = \frac{2}{3}\widehat{A}$; $\widehat{B} = \frac{4}{5}\widehat{D}$; $\widehat{C} = \frac{3}{4}\widehat{B}$. *Hallar el ángulo A*

Solución:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^o$
$\frac{3}{2}\widehat{B} + \widehat{B} + \frac{3}{4}\widehat{B} + \frac{5}{4}\widehat{B} = 360^o$
$\widehat{B} = 80^o$
$\widehat{A} = \frac{3}{2}\widehat{B}$
$\therefore \boxed{\widehat{A} = 120}$

Ejercicio 4.34 *En un cuadrilátero se tiene:*
$\widehat{A} = \frac{3x}{4} \quad \widehat{B} = \frac{2x}{3} + 55^o \quad \widehat{D} = 3x - 20^o \quad \widehat{C} = x$

Solución:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^o$ Suma de ángulos
$\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} + 55^o + x + 3x - 20 = 360^o$ Sustituyendo valores
$\frac{65x}{12} = 325 \qquad x = 60^o$
$\widehat{A} = \frac{3x}{4} = 45^o \qquad \widehat{C} = x = 60^o$
$\widehat{B} = \frac{2x}{3} + 55 = 95^o \qquad \widehat{D} = 3x - 20 = 160^o$

Ejercicio 4.35 *En un triángulo* ABC; $\overline{AB} = 12\,m$; $\overline{BC} = 8\,m$ *se inscribe un cuadrado con uno de sus vértices en B y el opuesto sobre la hipotenusa. Hallar el lado del cuadrado.*

Solución:

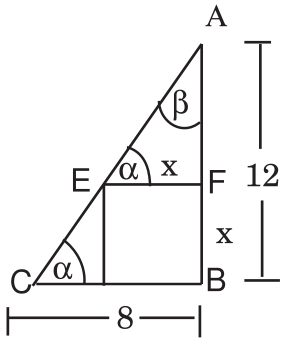

Figura 4.45: Ejercicio 4.35

$\triangle AEF \sim \triangle ABC$

$\dfrac{\overline{EF}}{CB} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ Lados homólogos

$$\frac{x}{8} = \frac{12-x}{12}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{24}{5}\, m}$$

Ejercicio 4.36 *Demostrar que :* $\triangle AOB \sim \triangle DOC$

Solución:

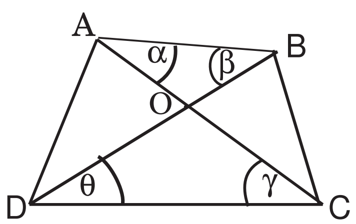

Figura 4.46: Ejercicio 4.36

$\alpha = \gamma$ $\quad A\widehat{O}B = D\widehat{O}C$ opuesto por el vértice

$\beta = \theta$ $\quad \therefore \boxed{\triangle AOB \sim \triangle DOC}$

Ejercicio 4.37 *Calcular el lado del cuadrado de la Figura 4.47*

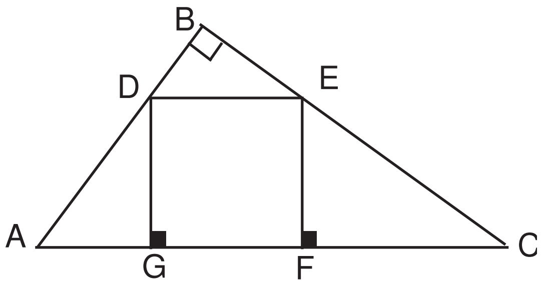

Figura 4.47: Ejercicio 4.37

$\triangle\ AGD \backsim \triangle DBE$

$x^2 = \overline{AD} \times \overline{BE}$ Lados homólogos

$\triangle DBE \sim \triangle EFC$

$x^2 = \overline{DB} \times \overline{EC}$ lados homólogos

$x^2 \times x^2 = \overline{AD} \times \overline{BE} \times \overline{DB} \times \overline{EC}$

$x^4 = 16$ $\boxed{x = 2\,m}$

. Si $\overline{AD} \times \overline{DB} \times \overline{BE} \times \overline{EC} = 16\,m^4$

Ejercicio 4.38 *En todo triángulo la bisectriz interior divide al triángulo en dos triángulos semejantes.*

Solución:

$\overline{BE}$: Bisectriz

$\overline{BE} = \overline{BE}$ lado común

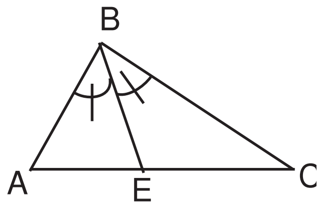

Figura 4.48: Ejercicio 4.38

$A\widehat{B}E = E\widehat{BE}$

$\therefore\ \triangle ABE \sim \triangle EBC$

Ejercicio 4.39 *En el gráfico de abajo (Figura 4.49) Hallar* a, $b\,h$ $c = 90^o$ *en dos triángulos semejantes.*

Solución:

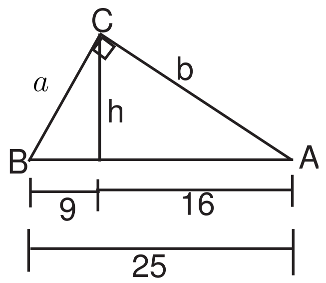

Figura 4.49: Ejercicio 4.39

$a^2 = 25 \times 9 \Longrightarrow \boxed{\text{a=15}}$ $\quad$ $h^2 = 9 \times 16 \Longrightarrow \boxed{\text{h=12}}$
$b^2 = 16 \times 25 \Longrightarrow \boxed{\text{b=20}}$

Ejercicio 4.40 *Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo ($\widehat{A} = 90^o$) son dos veces consecutivos y la altura relativa a la hipotenusa es $\sqrt{56}$. Calcular la hipotenusa*

Solución:

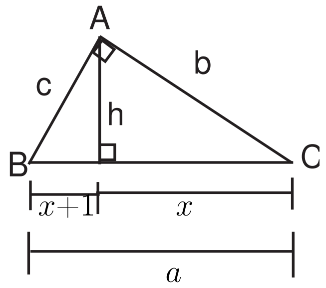

Figura 4.50: Ejercicio 4.40

$h^2 = x(x+1)$ $\quad$ $(x+8)(x-7) = 0$
$(\sqrt{56})^2 = x^2 + x$ $\quad$ $x = 7,\ x+1 = 8$
$x^2 + x - 56 = 0$ $\quad$ $\therefore \boxed{a\text{=15}}$

Ejercicio 4.41 *La relación de las proyecciones de los catetos B y c sobre la hipotenusa es* $\frac{9}{16}$. *El producto de laos catetos* $bc = 8$. *Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo .*

Solución:

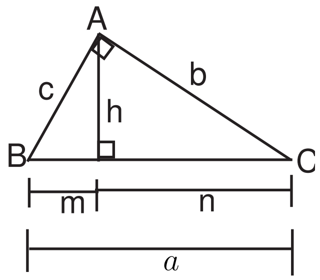

Figura 4.51: Ejercicio 4.41

$b^2 = an$; $c^2 = am$

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{n}{m} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4}, \; bc = 8$$

$$c = \sqrt{\frac{32}{3}}, \; \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{32}}$$

$a^2 = b^2 + c^2$ por teorema de Pitágoras

$$a^2 = \frac{32}{3} + \frac{64 \times 3}{32}$$

$$\therefore \; \boxed{a = 2\sqrt{3}}$$

Ejercicio 4.42 *Demostrar el teorema de Pitágoras*

Demostración:

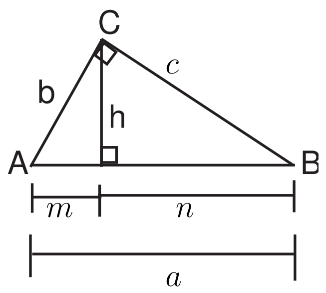

Figura 4.52: Ejercicio 4.42

$a^2 = c \times n$	$a^2 + b^2 = c(n+m)$
$b^2 = c \times m$	$c \times c$
$a^2 + b^2 = c \times n + c \times m$	$\therefore \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

4.4. SEGMENTOS Y ÁNGULOS

4.4.1. Segmentos. Operaciones con segmentos

4.4.2. Poligonales. Teoremas sobre poligonales

4.4.3. Ángulos. Medida de ángulos.

4.4.4. Tipos de ángulos

4.4.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C, D y E de modo que $\frac{AC}{2} = \frac{BD}{3} = \frac{CE}{5}$, además la suma de las longitudes del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$; $\overline{BC}$ con el segmento que une los puntos medios de $\overline{CE}$ y $\overline{CD}$ es k. Calcule $\frac{k}{AE}$

   A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{7}$ *Respuesta:* E)

2. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que $m\sphericalangle AOD = 80^o$. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices OM y ON de los ángulos AOC y BOD respectivamente, sabiendo que M y N pertenecen a la región interior del ángulo BOC y $m\sphericalangle BOM + m\sphericalangle CON = 20^o$
   A) 40^o B) 30^o C) 25^o D) 20^o E) 10^o
   Respuesta: D)

3. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D; de modo que: $AB.BD + AC.CD = AD.BC$ y $AB.CD = 8\,m^2$. Calcular la longitud del segmento $\overline{BC}$.

   A) $1\,m$ B) $2\,m$ C) $3\,m$ D) $4\,m$ E) $5\,m$

4. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C ; luego se toma el punto medio M de $\overline{BC}$. Hallar AM. Si: $AB + AC = 14\,m$

   A) $3\,m$ B) $4\,m$ C) $5\,m$ D) $7\,m$ E) $9\,m$

5. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; con la siguiente condición:

$$\frac{AB}{AC} + \frac{CD}{BC} = 1$$

calcular x Si: $\frac{x^3}{n} = \frac{BC}{AC} + \frac{BC}{BD}$; $n > 0$

A) $\sqrt{n}$ B) n C) $2n$ D) $\sqrt[3]{n}$ E) $\frac{n}{2}$

6. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y E con la siguiente condición:

$$AD = DE \quad AB = BD$$

$$AC + BD + CE + AE = 72$$

Calcular la longitud del segmento $\overline{BC}$. Si $\frac{1}{BC} + \frac{2}{AE} = 1$

A) $\frac{16}{15}\,\mu$ B) $\frac{15}{16}\,\mu$ C) $\frac{7}{8}\,\mu$ D) $\frac{8}{7}\,\mu$ E) $1\,\mu$

7. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F con la siguiente condición:

$$AB = EF = \frac{BE}{3}.$$

Calcular la longitud del segmento $\overline{BE}$ Si:

$$AC + BD + CE + DF = 24$$

A) $6\,\mu$ B) $7.5\,\mu$ C) $8,\mu$ D) $9\,\mu$ E) $12\,\mu$

8. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D con la siguiente condición

$$AD(CD - BC) = BD.CD \qquad \frac{2.AD - BD}{AD.AB} = \frac{3x - 1}{10}.$$

Calcular el valor de x Si : $AC = 4$

A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 0,5 E) 3

9. En una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D y E tal que $AC = \dfrac{AD}{2}$; $\quad 3.DE = AE$ y $4.AB = BC$.
   Hallar BD. Si: $CD = 5$

   A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 13

10. Sobre una línea recta se consideran los puntos M, N, P, Q consecutivos ."A" punto medio de $\overline{MP}$; "B" punto medio de $\overline{NQ}$.
    Si: $MN = 5\,\mu$, $\quad PQ = 11\,\mu$. Hallar: AB

    A) $4\,\mu$ B) $6\,\mu$ C) 8μ D) $10\,\mu$ E) $12\,\mu$

11. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D; se sabe que $AC = \sqrt{m}$ y se cumple las siguientes condiciones:

$$AB.AD = BC.CD \quad BC^2 - AB^2 = AB.CD.$$

    Hallar: $(CD)^2$

    A) m^2 B) $\sqrt{m}$ C) $\sqrt{\sqrt{m}}$ D) m E) $\dfrac{m^2}{2}$

12. La suma de los complementos y su suplementos de las medidas de dos ángulos es igual a 230^o. Si se sabe que la diferencia de las medidas de ambos ángulos es 15^o. Calcular el complemento de la medida del mayor ángulo.

    A) 5^o B) 10^o C) 15^o D) $62^o30'$ E) 60^o

13. En la figura mostrada, calcular : α. Si $AB = CD$
    A) 10^o B) 15^o C) $18^o30'$ D) 20^o E)

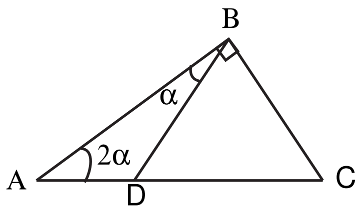

Figura 4.53: 13

$22^o30'$
Respuesta: E)

14. En la figura mostrada, calcular : x^o. Si $QC = 2.BP$

A) 10^o B) 15^o C) 20^o D) 30^o E) 45^o
Respuesta: D)

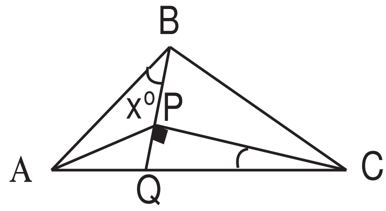

Figura 4.54: 14

15. En la figura mostrada $MC = a$; $AC = MB = b$; $AB = a+b$; $m\sphericalangle MAC = 30^o$ y $m\sphericalangle MCA = 40^o$. Calcular: $m\sphericalangle MBC$.
A) 35^o B) 20^o C) 25^o D) 20^o E) 10^o
Respuesta: C) A) 35^o B) 20^o C) 25^o D) 20^o

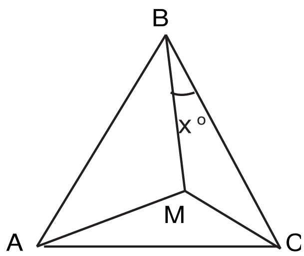

Figura 4.55: 15

E) 10^o

16. En la figura mostrada, calcular: θ.
A) 8^o B) 10^o C) 15^o D) 12^o E) 5^o
Respuesta: B)

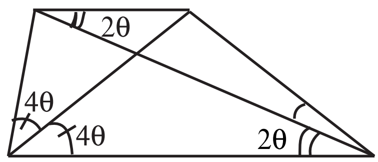

Figura 4.56: 16

4.5. PERPENDICULARIDAD Y PARALELISMO

4.5.1. Definición de perpendicularidad. Postulados

4.5.2. Teoremas sobre perpendicularidad

4.5.3. Definición de paralelismo. Postulados

4.5.4. Teoremas sobre paralelismo

4.5.5. Ángulos formados por rectas cortadas por una secante. Teoremas

4.5.6. Ángulos con lados paralelos y perpendiculares

4.5.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el gráfico Figura 4.57 (véase Figura 4.57 página 164)$L_1//L_2$ y el ángulo $A\widehat{B}C$ es agudo, calcule el mínimo valor de x.
   A) 20^o B) 21^o C) 22^o D) 18^o E) 19^o

   Respuesta: E)

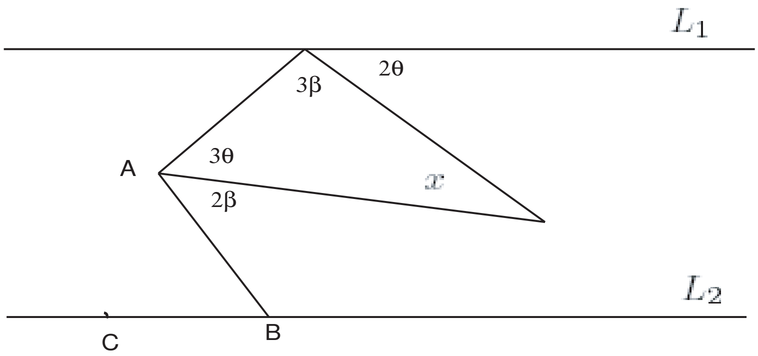

Figura 4.57: 1

2. Determinar el número de grados en los ángulos requeridos Figura (véase Figura 4.58 página 164)
   Hipótesis: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$;
   $$m\angle BAE = 50;$$
   $$m\angle DCE = 40.$$

   Hallar: $m\angle\alpha + m\angle\beta =$
   (Nota: El símbolo $m\angle\alpha$ indica la medida del ángulo α)
   Respuesta : 90

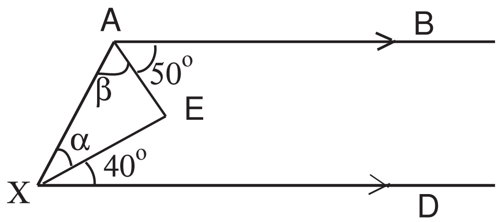

Figura 4.58: 2

3. Determinar el número de grados en los ángulos requeridos
   Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$;
   $$\overline{AC} \perp \overline{BC}.$$
   Hallar: $m\angle A =$ (m: indica la medida del ángulo)
   Respuesta: 45

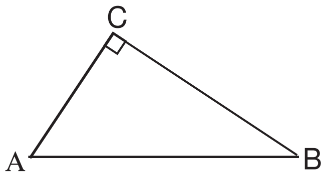

Figura 4.59: 3

4. Hallar $m\angle\alpha$:, $L\|m$; $r\|s$
   Respuesta: 55

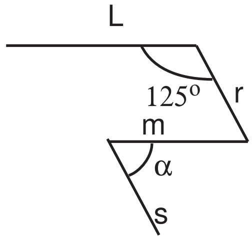

Figura 4.60: 4

5. Hallar $m\angle\alpha$:, $L\|m$
   Respuesta: 18

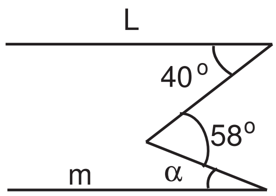

Figura 4.61: 5

6. Hallar $m\angle\alpha$:
   Respuesta: 50

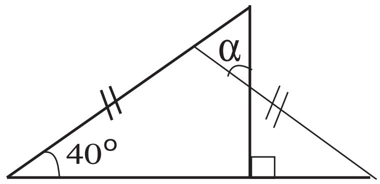

Figura 4.62: 6

7. La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es ....

8. Una recta que corta dos o mas rectas se llama ....

9. Dos rectas paralelas a la misma recta son .... entre si.

10. Si dos triángulos isósceles tienen una base común, la recta que une sus vértices es .... a la base. Respuesta: Perpendicular

11. Un triángulos es .... si dos de sus alturas son congruentes.

12. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son ....

13. Si las sumas de las medidas de dos de los ángulos de un triángulo es igual a la medida del tercer ángulo, el triángulo es

14. Ningún triángulo rectángulo puede tener un ángulo ....

15. Los dos ángulos externos en cualquiera de los vértices de un triángulo son ángulos ....y, por lo tanto, son ángulos ....

4.6. TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS

4.6.1. Clasificación. Rectas y puntos notables.

4.6.2. Igualdad de triángulos. Casos de igualdad

4.6.3. Polígonos. Teoremas sobre polígonos

4.6.4. Cuadriláteros. Clasificación. Teoremas

4.6.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿ Cuántos lados tiene el polígono regular cuya medida de un ángulo externo es igual a los $\dfrac{2}{13}$ de la medida de un ángulo interno.?
   A) 12 lados B) 8 lados C) 15 lados D) 14 lados
   E) 16 lados
   Respuesta: C)

2. ¿Cuantos lados tiene un polígono cuya suma de las medidas de sus ángulos internos y externos es 3960^o?

   A) 21 lados B) 20 lados C) 22 lados D) 18 lados E) 16 lados
   Respuesta: C)

3. Un Polígono regular tiene dos lados más que otro, pero su ángulo central mide 30^o menos que la medida del otro , luego el polígono es :

   A) Pentágono B) heptágono C) exágono D) octágono E) triágulo
   Respuesta: C)

4. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencian en 342 y cuyas medidas de sus ángulos centrales están en la relación como 2 es a 3. Hallar la diferencia de las medidas de sus ángulos centrales.

   A) 5^o B) 6^o C) 12^o D) 8^o E) $N.A.$
   Respuesta: A)

5. El ángulo formado por las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ de un triángulo ABC es el doble de ángulo A. Hallar los ángulos interiores del triángulo si: $\widehat{B} - \widehat{C} = 20^o$.

6. En un triángulo acutángulo $ABC : \widehat{B}+\widehat{C} = 140^o$. Hallar el menor ángulo formado por las alturas trazadas desde los vértices B y C.

7. En un triángulo rectángulo ABC recto en A, uno de los ángulos agudos es 15 grados más que el cuadruplo del otro. Hallar el ángulo que forman la mediana y la altura trazadas desde el vértice del ángulo recto.

8. Se da un triángulo $\triangle ABC$;. $\widehat{A} = 80^o$, Sobre el lado AB se ubica un punto D de tal modo que $BD = DC$, y $DA = AC$. Hallar el ángulo $B\widehat{C}A$.
Respuesta 75^o

9. En un triángulo isósceles MPQ se trazan las alturas relativas a los lados iguales, el ángulo del vértice P mide 46^o. Calcular la medida de los ángulos formados al cortarse las alturas.
Respuesta: $\widehat{x} = 134^o$

4.7. PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

4.7.1. Segmentos proporcionales

4.7.2. Division de un segmento en razón

4.7.3. Teoremas de Tales. Corolarios

4.7.4. División de un segmento en partes proporcionales a varios números

4.7.5. Semejanza de triángulos. Casos de semejanza

4.7.6. Semejanza de triángulos rectángulos

1. En un triángulo ABC, obtuso en B, se traza la bisectriz interior BM y las alturas AN y CQ respectivamente. Si $AN = a$ y $CQ = b$, calcule la longitud de la altura trazada desde M en el triángulo MBC

   A) ab B) $\dfrac{a}{b}$ C) $\sqrt{ab}$ D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{a+b}{ab}$
   Respuesta: D)

2. Según el gráfico $PQRS$ es un cuadrado de centro O. Si $AP = 4$ y $SC = 9$, calcule PT. A) $5,4$ B) $1,8$ C) $1,2$ D) $2,4$ E) $3,6$
   Respuesta: E)

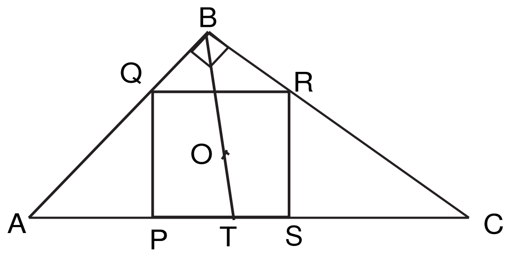

Figura 4.63: 2

3. En la figura mostrada P y T son puntos de tangencia, O es centro de la semicircunferencia . Calcule OH, si se sabe que $PH = 15$, $HT = 8$ y el radio de la circunferencia mide 13.
   A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

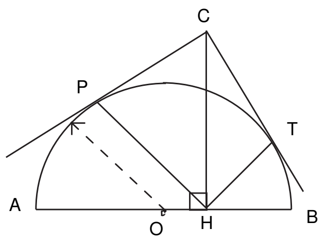

Figura 4.64: 3

   Respuesta: C)

4. En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$. Hallar QC, si: $AP = 2\,m$, $PB = 3\,m$ y $BQ = 4\,m$.

   A) $5\,m$ B) $1{,}6\,m$ C) $4,57\,m$ D) $3,43\,m$ E) $6\,m$
   Respuesta: C)

5. En la figura mostrada: $\overline{PQ}//\overline{AC}$. Si: $+\ AB = 20\,m$ y $BC = 15\,m$. Hallar :PQ.

   A) $\dfrac{15}{2}\,m$ B) $\dfrac{25}{6}\,m$ C) $\dfrac{16}{3}\,m$ D) $\dfrac{30}{7}\,m$ E) $\dfrac{40}{9}\,m$
   Respuesta: B)

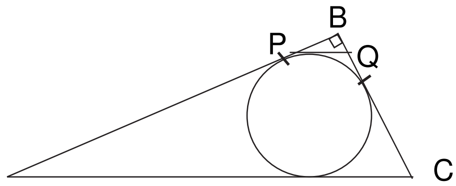

Figura 4.65: 5

6. En la figura mostrada: $MNPQ$ es un cuadrado. Si $FM = 2\,m$ y $QT = 6\,m$. Hallar : BE.
   A) $\frac{3}{5}\sqrt{10}\,m$ B) $\frac{3}{5}\sqrt{15}\,m$ C) $\frac{2}{3}\sqrt{7}\,m$ D) $3,5\,m$

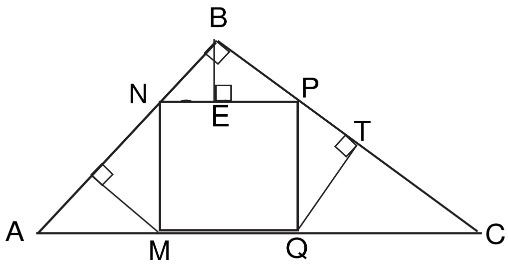

Figura 4.66: 6

   E) $2\,m$
   Respuesta: A)

7. En un triángulo ABC, $AB = 20$, $BC = 10$ y $AC = 21$, se trazan las bisectrices, interior BD y exterior BE. Hallar $\overline{DE}$.
   Respuesta 28

8. Sea $M = 2,8\,cm$, $N = 4{,}1\,cm$. Hallar una tercera proporcional entre M y N si N es media proporcional.

9. Dado un triángulo ABC, si trazamos un segmento $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{BC}$, escribir todas las proporciones que resulten.

10. Dos segmentos a y b son proporcionales a c y d. Si: $a = 6\,m$; $b = 8\,m$; $c + d = 21\,m$. Hallar c y d.

11. Si la razón de semejantes de dos triángulos es $6/5$ y el perímetro del mayor es $72\,m$. cual es el perímetro del menor.

Respuesta: a) $70\,m$. b) $60\,m$, c) $50\,m$, d) $55\,m$. e) $45\,m$.

4.8. RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

4.8.1. Proyecciones

4.8.2. Teoremas

4.8.3. Teorema de Pitágoras

4.8.4. Cálculo de proyecciones

4.8.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrado $ABCD$; si $EC = 2\,m$ y $DF = 3\,m$.
   A) $2\,m$ B) $3\,m$ C) $4\,m$ D) $6\,m$ E) $9\,m$

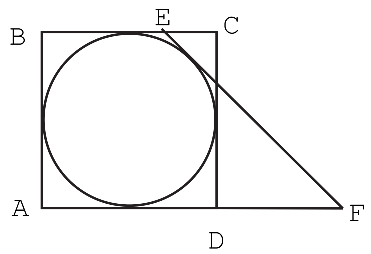

Figura 4.67: 1

Respuesta: D)

2. En un triángulo acutángulo ABC; si: $\overline{AB} = 7\,m$; $\overline{AC} = 12\,m$ la altura relativa a $\overline{AC}$ mide 6 m. Hallar la longitud del tercer lado.
   Respuesta: $10{,}3\,m$

3. Dado un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide $12m$ y su proyección sobre la hipotenusa mide $6m$. Determinar la longitud del otro cateto.
   Respuesta: $\sqrt{412}\,m$

4. Si del punto medio de un cateto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular sobre la hipotenusa, la diferencia de los cuadrados de los segmentos formados sobre la hipotenusa es igual al cuadrado del otro cateto.

5. En un triángulo acutángulo ABC, el lado $\overline{AB} = 15\,m$; $\overline{BC} = 14m$ y la proyección del lado $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$ mide $5\,m$. Hallar el lado $\overline{AC}$.
   Respuesta: $13\,m$

6. Los tres lados de un triángulo ABC son: $a = 25\,m$; $b = 39\,m$ y $c = 56\,m$. Calcular la altura respecto al lado C.

7. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $15\,cm$ y la altura respecto a ella mide $6\,cm$ Hallar la longitud del cateto menor.

   a) $2\sqrt{5}$, b) $3\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$

8. En un trapecio la base mayor AB mide $8\,m$, y la diagonal BD mide $6\,m$. Hallar la base menor, si las diagonales son perpendiculares y que $\sphericalangle CAB = 30^o$.

   a) $2\,m$ b) $3\,m$. c) $4.2\,m$ d) $2.4\,m$, e) $4\,m$

9. Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo son 2 números enteros consecutivos y la altura relativa a la hipotenusa mide $\sqrt{42}$. Calcular la medida de la hipotenusa.
   Respuesta: 13.

4.9. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

4.9.1. Definiciones básicas

4.9.2. Ángulos en una circunferencia. Teoremas sobre cuerdas y ángulos

4.9.3. Ángulo central, ángulo inscrito, semiinscrito, exterior. Teoremas.

4.9.4. Relaciones métricas en la circunferencia

4.9.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Desde un punto P exterior a una circunferencia se traza las tangentes PA, PB (A y B puntos de tangencia) y la secante PCD de modo que la $m\sphericalangle APB = m\widehat{CBD} = 90^o$; calcule la $m\widehat{AC}$.
   A) 30^o B) 53^o C) 50^o D) 75^o E) 74^o

   Respuesta: D)

2. Desde un punto P exterior a una circunferencia se traza las tangentes PA y PB (A y Bpuntos de tangencia). Luego se traza la cuerda AC de modo que la distancia de P a $\overline{AC}$ es igual a la longitud de $\overline{AC}$. Calcule la $m\sphericalangle APB$.

   A) 30^o B) 83^o C) 106^o D) 74^o E) 53^o

   Respuesta: E)

3. En una circunferencia de $15m.$ de radio, dos cuerdas se cortan y dan por producto de sus segmentos respectivos $200\,m^2$. Hallar la distancia del centro de la circunferencia al punto de intersección de las cuerdas.

4. En un triángulo ABC, por los vertices A y C pasa una circunferencia que corta a AB en M y BC en N. La tangente trazada por C, es paralela a AB. Si $AC = 12$ y $BC = 16$, hallar NC.
   Respuesta: 9

5. Se da una circunferencia de centro O y de diámetro $\overline{AB}$. Se traza la cuerda $\overline{RS}$ que corta en P. Hallar el radio de la circunferencia si $\overline{AP} = 2\,m$, $\overline{PS} = 8\,m$ y $\overline{RB} = 3\overline{AS}\,m$.
   Respuesta: $13\,m$. m.

Capítulo 5

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría estudia sobre todo relaciones o razones que se dan en un triángulo rectángulo. Estas relaciones conocidas como funciones trigonométricas, por una parte permiten determinar elementos de un triángulo a partir de otros elementos del triángulo y por otra parte permiten describir adecuadamente fenómenos naturales periódicos.

La trigonometría permite expresar en forma algebraica algunos resultados importantes de la geometría, lo referido específicamente a triángulos; y esencialmente permite generalizar estos resultados en términos del concepto de función. Las así llamadas funciones trigonométricas juegan un papel importante en la física y materias afines que se cursan en carreras de la Facultad de Ciencias y Tecnología pues permiten describir modelos matemáticos de fenómenos conocidos como periódicos y también son útiles para definir determinadas magnitudes físicas.

Un objetivo importante en el aprendizaje de la trigonometría es el de comprender claramente las variaciones que sufren los valores trigonométricos a medida que varía el ángulo correspondiente. Por otra parte, también se estudian las relaciones existentes entre las diferentes funciones trigonométricas conocidas como indentidades trigonométricas; y éstas últimas se emplean en la resolución de las igualdades conocidas como ecuaciones trigonométricas.

Cabe reiterar que las funciones trigonométricas son de importancia porque se emplean a lo largo de la formación universitaria en ciencias y tecnología en el transcurso de varias asignaturas y durante casi toda la carrera de formación profesional.

5.1. TEORÍA - EJEMPLOS

Medidas de ángulos y arcos. Para medir un ángulo o un arco se toma como unidad de medida un arco un ángulo pequeño.
Para medir un ángulo o un arco existen dos sistemas importantes: el sistema sexagesimal y el sistema circular.

a) **Sistema sexagesimal.-** Considera la unidad de medida la 360 ava parte de la circunferencia o circulo. Cada parte se llama"grado sexagesimal".
Cada grado dividido en 60 partes llamadas "minuto" y cada minuto dividido en 60 partes llamadas "segundos". Un arco de 20 grados, 25 minutos y 30 segundos, Por ejemplos se escribe así: $20^{O}25'30''$

b) **Sistema circular o radial.-** La unidad de medida fundamental es el radian"(rad). En geometría, la circunferencia se mide así $C = 2\pi r$ pero en como en trigonometría el radio es unitario entonces la circunferencia valdrá $C = 2\pi$ radios pero se dice $C = 2\pi$ radianes radianes.

Equivalencia.- Equivalencia entre el sistema circular y el sistema sexagesimal $2\pi\, rad = 360^{o}$
Longitud de un arco.- S es la magnitud del arco expresada en unidades lineales que pueden ser centímetros, pulgadas, pies, metros, etc. Se calcula multiplicando el ángulo central en radianes por su radio. (ver Figura 5.1)

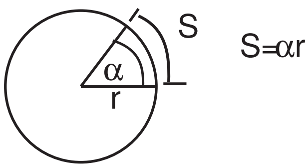

Figura 5.1:

Sistema de coordenadas rectangulares.- Es un conjunto de dos rectas, en lo general un eje horizontal (eje de abscisas) y otra vertical (eje de las ordenadas), el punto de intersección de las 2 rectas se llama origen de las coordenadas, Las abscisas que están a la derecha del eje de las ordenadas son positivas, y las que están a la izquierda son negativas. Las ordenadas que están por encima del eje de las abscisas son positivas, y las que están por debajo son negativas. Los ejes dividen al plano en cuatro partes iguales llamados cuadrantes I, II, III, IV

Definición 5.1.1 *(Función trigonométrica) Es aquella donde la variable independiente es un ángulo, Existen 6 funciones trigonométricas que reciben los nombres de seno, coseno, tangente, cotangente secante y cosecante.*

Definición de las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.- Tomando en cuenta los 2 catetos y la hipotenusa de un triángulo, las funciones trigonométricas de un ángulo agudo se define de la siguiente manera.
Para las funciones trigonométricas se considera el triángulo rectángulo de la Figura 5.2

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{sen} A = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{b} & , \quad \cot A = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{c}{a} \\
\cos A = \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{c}{b} & , \quad \sec A = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{b}{c} \\
\tan A = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \dfrac{a}{c} & , \quad \csc A = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \dfrac{b}{a}
\end{array}$$

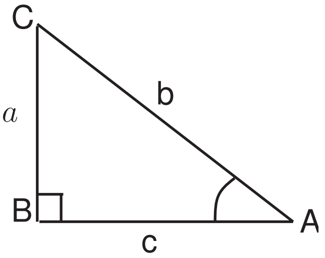

Figura 5.2:

Cuadro 5.1: **Signo algebraicos de las funciones**

	SEN	COS	TAN	COT	SEC	CSC
I C	+	+	+	+	+	+
II C	+	-	-	-	-	+
III C	-	-	+	+	-	-
IV C	-	+	-	-	+	-

Los signos algebraicos de las funciones trigonométricas son muy importantes para no cometer errores.
a) **Ángulos negativos.-** Las funciones trigonométricas de ángulos negativos son iguales a las funciones trigonométricas del mismo nombre del ángulo positivo, todas de signo contrario excepto el coseno y la secante que tienen signo

Cuadro 5.2:

	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0
cot	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	$\nexists$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1	$\nexists$	0
csc	$\nexists$	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	$\nexists$	-1	$\nexists$

positivo.
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad$ $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\quad$ $\cot(-\alpha) = -\csc\alpha$

Ejemplo 5.1 *Ubicar en que cuadrante se encuentra el ángulo de* 780^o

Solución:

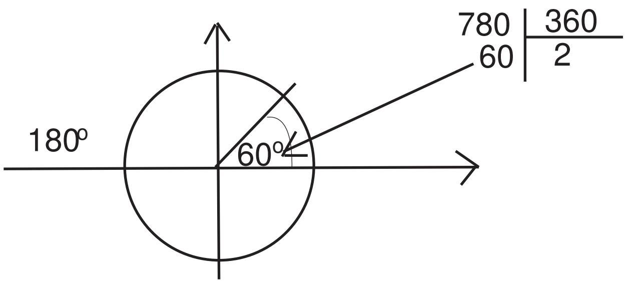

Figura 5.3: Ejemplo 5.1

780^o se encuentra en el primer cuadrante y ha dado dos vueltas completas

Ejemplo 5.2 *Simplificar y calcular* $y = \dfrac{\operatorname{sen}(-135) + \cos 180}{\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}}$

Solución:

$$y = \frac{\operatorname{sen}(-135) + \cos 180}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{-\operatorname{sen} 135 + \cos 180}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}$$

Reemplazando lo valores de $\operatorname{sen} 135^o$ y $\cos 180^o$ (ver Cuadro 5.2 página 178)

$$y = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{\frac{-\sqrt{2}-2}{2}}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{-(\sqrt{2}+2)}{\sqrt{2}+2} = -1$$

$$\therefore y = -1$$

Ejemplo 5.3 *Por que factor debe multiplicarse* $\sec 45^o$ *para ser igual a* $\csc 45^o$

Solución: $x \sec 45^o = \csc 45^o$

$$x = \frac{\csc 45^o}{\sec 45^o} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} 45^o}}{\frac{1}{\cos 45^o}} = \frac{\cos 45^o}{\operatorname{sen} 45^o} = \frac{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = 1$$

Ejemplo 5.4 *Calcular el* $\cos 75^o$

Solución:

$$\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o) = \cos 45^o \cos 30^o - \operatorname{sen} 45^o \operatorname{sen} 30^o = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS A DIFERENTES ÁNGULOS Ángulos confinarles **Ángulos cofinales.-** Se llaman ángulos cofinales a todos aquellos ángulos que tiene los mismos lados se expresan de la siguiente forma $\alpha + 2\pi k$ o $\alpha + 360^o k$ siendo k un número entero positivo, negativo o cero.
Las funciones trigonométricas del mismo nombre de ángulos cofinales son iguales:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$$
$$\tan(\alpha + 2\pi k) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha + 2\pi k) = \cot\alpha$$
$$\sec(\alpha + 2\pi k) = \sec\alpha$$
$$\csc(\alpha + 2\pi k) = \csc\alpha$$

REDUCCIÓN GENERAL DE REDUCCIÓN.- Toda función trigonométrica de un ángulo de la forma $(n \cdot 90^o \pm \beta)$ ó $(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \beta)$ donde es un ángulo agudo positivo cualquiera es igual:
a) Si n es par es igual a la misma función trigonométrica del ángulo
b) Si n es impar es igual a la cofunción de la función trigonométrica. del ángulo
En ambos casos el signo algebraico es el signo de la función dada de acuerdo al cuadrante donde pertenece

Ejemplo 5.5

$$\operatorname{sen}(270 - \beta) = \operatorname{sen}(3 \cdot 90 - \beta) = -cos\beta$$

Ejemplo 5.6

$$\cos(180 + \beta) = \cos(2 \cdot 90 + \beta) = -\cos\beta$$

Ejemplo 5.7 $\csc(-300)$

Solución:
$\csc(-300) = -\csc 300 = -\csc(3 \cdot 90 + 30) = \sec 30 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Expresión de una función en términos de las otras funciones.-

$$\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1;\ \tan\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta};\ \cot\beta=\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta};$$
$$\sec\beta=\frac{1}{\cos\beta};\ \csc\beta=\frac{1}{\operatorname{sen}\beta};\ \cot\beta=\frac{1}{\tan}$$
$$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta;\ 1+\cot^2\beta=\csc^2\beta$$

funciones trigonométricas de la suma de ángulos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \tan(\alpha+\beta)&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

funciones trigonométricas de la diferencia de ángulos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \tan(\alpha-\beta)&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas para el ángulo doble

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2\alpha&=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\operatorname{sen}^2\alpha\\ \tan2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\\ \cot2\alpha&=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}\end{aligned}$$

Funciones trigonométricas de ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\tag{3}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\tag{4}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\tag{5.1}$$

Suma y Diferencia de Senos y Cosenos

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Ejemplo 5.8 *Simplificar:* $y = \operatorname{sen}(\beta+45) + \operatorname{sen}(\beta-45)$.

Solución: Sabiendo que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \tag{5.2}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} y &= \cos(\beta+45) + \operatorname{sen}(\beta-45) && \text{Por dato} \\ &= \cos\beta\cos 45 - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}45 + \operatorname{sen}\beta\cos 45 - \cos\beta\cos 45 && \text{Por 5.2 y 5.3} \\ &= \cos\beta\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen}\beta\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen}\beta\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\beta\frac{\sqrt{2}}{2} && \text{Por el Cuadro5.2 página 178} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9 *Demostrar:* $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

Solución: Sea $y = \tan\alpha - \tan\beta$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \tan\alpha - \tan\beta \end{aligned}$$

$$\therefore \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Ejemplo 5.10 *Resolver la ecuación trigonométrica* $5\operatorname{sen} x = 6\cos^2 x$

Solución:

$$5\operatorname{sen} x = 6(1-\operatorname{sen}^2 x)$$

$$6\operatorname{sen}^2 x + 5\operatorname{sen} x - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{3}$ $\qquad x_1 = 41^o;\ x_2 = 138^o$

$\operatorname{sen} x = -\dfrac{3}{2}$

5.2. ÁNGULOS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

5.2.1. Ángulos positivos y negativos

5.2.2. Ángulos en sistema de coordenadas cartesianas

5.2.3. Funciones trigonométricas

5.2.4. Variaciones de las funciones trigonométricas

5.2.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En qué cuadrante está el ángulo 225^o
   Respuesta. III.

2. En qué cuadrante está el ángulo 651^o
   Respuesta. IV.

3. En qué cuadrante está el ángulo -315^o

   Respuesta. I.

4. En qué cuadrante está el ángulo -910^o

   Respuesta: II.

5. En qué cuadrante está el ángulo 1500^o
   Respuesta. I.

6. En qué cuadrante está el ángulo -540^o
   Respuesta: Entre II y III.

7. En qué cuadrante está el ángulo 410^o

8. En qué cuadrante está el ángulo -300^o

9. En qué cuadrante está el ángulo -1200^o

10. En qué cuadrante está el ángulo 810^o
    En los ejercicios 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17, dar un ángulo positivo y uno negativo que tengan cada uno el mismo lado inicial y el mismo lado terminal que cada uno de los siguientes ángulos.

11. 45^o

    Respuesta: $405^o, \quad -315^o$

12. -30^o

13. 120^o Respuesta: $480^o, \quad -240^o$

14. -200^o

15. -390^o

    Respuesta: $330^o, \quad -30^o$

16. 340^o

17. 330^o

    En los ejercicios 18, 19, 20, 21 y 22, hallar las funciones del ángulo XOP para las siguientes posiciones de P (siendo OX el lado inicial en cada caso). Expresar las soluciones como fracciones comunes en la forma más simple. Las soluciones están dadas en el orden seno, coseno, tangente.

18. $(-4, 3)$. Respuesta: $\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}$, etc.

19. $(-1, -2)$. Respuesta: $-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 2, etc.

20. $(-15, 8)$.

21. $(-1, -1)$. Respuesta: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, etc.

22. $(-6, 8)$. Respuesta: $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{3}$, etc.

23. ¿Que ángulo positivo menor que 360^o tiene el mismo lado terminal que -30^o? ¿Cuáles son los valores de las funciones de -30^o ?
Respuesta: 330^o; $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$, etc.

    En los ejercicios 24, 25 Hallar los valores de las funciones de los siguientes ángulos. Dibujar en cada caso una figura indicando sobre ella por una flecha la magnitud y dirección del ángulo, y por números los valores de x, y, r.

24. -60^o Respuesta: $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}$, etc

25. -390^o Respuesta: $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{3}$, etc.

26. Calcular las Funciones trigonométricas del ángulo α, sabiendo que: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$

27. Calcular las funciones trigonométricas de α, sabiendo que: $\csc\alpha = \frac{5}{2}$
Respuesta: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{5}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$; $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$; $\sec\alpha = \frac{5\sqrt{21}}{21}$; $\cot\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

28. $\sec\alpha = \frac{6}{5}$
Respuesta: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$; $\cos\alpha = \frac{5}{6}$; $\tan\alpha = \frac{\sqrt{11}}{5}$; $\csc\alpha = \frac{6\sqrt{11}}{11}$; $\cot\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{11}$.

29. $\cot\alpha = \frac{1}{3}$ Respuesta: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\tan\alpha = 3$; $\csc\alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$; $\sec\alpha = \sqrt{10}$
En los ejercicios 30, 31, 32, 33, 34, verificar las identidades:

30. $1 + \operatorname{sen}\alpha\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cot\alpha}{\cot\alpha}$

31. $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)^2 = 2$

32. $\dfrac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = \dfrac{1 + \cot\alpha}{\cot\alpha - 1}$

33. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = 1 - \dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha - \tan\beta}$

34. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \tan\alpha \cdot \tan\beta\,.$

35. hallar el valor de las expresiones siguientes:

    a) $\dfrac{2\operatorname{sen}30^o}{\tan 60^o} + \dfrac{1}{\cos 180^o} - \tan 30^o$ Respuesta: -1

    b) $\dfrac{\tan 45^o + \sec 45^o}{\operatorname{sen}90^o - \operatorname{sen}45^o} + \dfrac{1}{\cos 360^o + \cos 65^o} - \tan 30^o$
    Respuesta: $6 + 2\sqrt{2}$

    c) $\dfrac{\tan 45^o \cos 60^o}{\sec 180^o + 2} + \dfrac{\operatorname{sen}30^o - \cot 60^o}{\tan 360^o + 1}$ Respuesta: $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{3}$

36. Estudiar las variaciones del seno y tangente en el primer cuadrante; del coseno y de la cotangente en el segundo y de la secante y cosecante en el tercero.

37. Si $a = 30^o; b = 180^o; c = 90^o; d = 270^o$. Hallar el valor de las expresiones:

    a) $\sqrt{\dfrac{\cos^2 a + 2\operatorname{sen}a}{\operatorname{sen}c + \cot d}}$ *Respuesta* : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

    b) $\sqrt{\dfrac{\cos^2 0^o - 3\tan a \cos b}{1 + 3\cot 60^o}}$ Respuesta:1

    c) $\dfrac{\dfrac{\cos^2 60^o}{\operatorname{sen}a} - \dfrac{\cos b \tan 45^o}{1 + 3\sec^2 b}}{2 - \dfrac{\cot 60^o + 3\sec^2 60^o}{1 - \csc^2 45^o}}$ Respuesta: $\dfrac{3}{43}$

5.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE DIFERENTES ÁNGULOS

5.3.1. Círculo y líneas trigonométricas

5.3.2. Reducción al primer cuadrante

5.3.3. Funciones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios

5.3.4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Expresar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos por las de un ángulo menor de 45^o
   a) 74^o *b*) 85^o. *c*)140^o *d*) 166^o

2. Hallar los valores de las funciones trigonométricas de 135^o y 150^o

3. Reducir a un ángulo menor de 45^o, las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos:
   a) 118^o *b*) 172^o *c*) $102^o\,51'$

4. Expresar las siguientes funciones trigonométricas por las de un ángulo agudo: *a*) $\operatorname{sen} 99^o$ *b*) $\tan 136^o$ *c*) $\cos 147^o$

5. Hallar los valores de las siguientes funciones:
   a) $\operatorname{sen} 210^o$ Respuesta: $-\frac{1}{2}$ b) $\tan 225^o$
   Respuesta: 1 c) $\sec 240^o$ Respuesta:
   -2

6. Reducir al primer cuadrante las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos
   a) 285^o b) 310^o c) 209^o
   d) 306^o

7. Expresar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos como las de un ángulo de menor de 45^o

   a) 289^o b) 297^o c) 352^o

8. Reducir las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos las de un ángulo positivo menor de 45^o

   a) -82^o b) -132^o c) -234^o d) -356

9. Hallar los valores de las siguientes funciones:
   a) $\operatorname{sen}(-30^o)$ b) $\cot(-120^o)$ c) $\operatorname{sen}(-300^o)$
   d) $\sec(-315^o)$ e) $\operatorname{sen}(-225^o)$

10. Reducir las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos a las de un ángulo positivo menor de 45^o :
    a) 748^o b) 249^o c) 3889^o d) 12096^o e) 6120^o

11. hallar los valores de las siguientes funciones trigonométricas:
    a) $\operatorname{sen}(-330^o)$ b) $\operatorname{sen} 2820^o$ c) $\cos(-420^o)$ d) $\cot 675^o$

12. Simplificar las expresiones:
    a) $\dfrac{\cos(-x)}{\cos(180^o - x)} - \dfrac{\operatorname{sen}(360^o + x)}{\operatorname{sen}(-x)})$ Respuesta: 0
    b) $\dfrac{\operatorname{sen}(90^o + a)}{\cos(-a)} + \dfrac{\cos(90^o - a)}{\operatorname{sen} a}$ Respuesta: 2

13. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120^o$

14. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo: $\alpha = 212^o$

15. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 315^o$

    En los ejercicios 16,17, ..., 29, expresar las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos, mediante las funciones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante.

16. $112^o40'$
    Respuesta:
    $\operatorname{sen} 112^o40' = \operatorname{sen} 77^o20'$
    $\cos 112^o40' = -\cos 77^o20'$
    $\tan 112^o40' = -\tan 77^o20'$

$\csc 112^o40' = \csc 77^o20'$
$\sec 112^o40' = -\sec 77^o20'$
$\cot 112^o40' = -\cot 77^o20'$

17. 164^o

18. $205^o15'28''$
Respuesta:
$\operatorname{sen} 205^o15'28'' = -\operatorname{sen} 25^o15'28''$
$\cos 205^o15'28'' = -\cos 25^o15'28''$
$\tan 205^o15'28'' = \tan 25^o15'28''$
$\csc 205^o15'28'' = -\csc 25^o15'28''$
$\sec 205^o15'28'' = -\sec 25^o15'28''$
$\cot 205^o15'28'' = \cot 25^o15'28''$

19. 249^o

20. $221^o50'53''$

21. $309^o27'16''$
Respuesta:
$\operatorname{sen} 309^o27'16'' = -\operatorname{sen} 50^o32'44''$
$\cos 309^o27'16'' = \cos 50^o32'44''$
$\tan 309^o27'16'' = -\tan 50^o32'44''$
$\csc 309^o27'16'' = -\csc 50^o32'44''$
$\sec 309^o27'16'' = \sec 50^o32'44''$
$\cot 309^o27'16'' = -\cot 50^o32'44''$

22. 285^o

23. $346^o13'58''$

24. $331^o45'19''$

25. $-110^o49'20''$
Respuesta:
$\operatorname{sen}(-110^o49'20'') = -\operatorname{sen} 69^o10'40''$
$\cos(-110^o49'20'') = -\cos 69^o10'40''$
$\tan(-110^o49'20'') = \tan 69^o10'40''$
$\csc(-110^o49'20'') = -\csc 69^o10'40''$

$\sec(-110^o49'20'') = -\sec 69^o10'40''$
$\cot(-110^o49'20'') = \cot 69^o10'40''$

26. $-66^o5'8''$

27. -857^o

28. $-315^o45'23''$

29. $-638^o15'57''$

30. Calcular el valor de la expresión:
$\operatorname{sen}(180^o - \alpha)\cos(90^o - \alpha) + \operatorname{sen}(90^o + \alpha)\cos(180^o - \alpha)$
Respuesta: -1.

31. Calcular el valor de la expresión:
$\dfrac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}{\tan(2\pi + \alpha)}$
Respuesta: $-\cos^2\alpha$

32. Calcular el valor de la expresión
$\tan^2(2\pi + \alpha)\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)\operatorname{sen}(-\alpha)$
Respuesta: 0.

33. En un triángulo rectángulo ABC, b=24, c=10. Calcular las funciones trigonométricas de C.

34. Dado $sen(B) = \dfrac{4}{5}$, $b = 540$. Hallar la hipotenusa del triángulo
Respuesta: 50.

35. Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que $\cos C = \dfrac{4}{5}$ y $b = 16$
Respuesta: 20

36. En un triángulo rectángulo ABC, $\operatorname{sen} B = \dfrac{5}{16}$, hallar las funciones restantes de B.

37. En el triángulo rectángulo ABC, $c = 48\,cm.$ y $\sec C = \dfrac{13}{5}$
    Respuesta: $a = 52 : b = 20$

38. Dado $\cos(B) = \dfrac{3}{4}$ construir el ángulo B y hallar las demás funciones de este ángulo.

39. Si $\sec(B) = 4{,}25$ construir B y calcular todas las funciones.

40. $\operatorname{sen} 30^o \cos(45^o)$
    Respuesta: $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

41. $\dfrac{30^o}{\cos(45^o)} + \dfrac{\sec 45^o}{\tan 45^o}$ Respuesta: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

42. Hallar x en la ecuación: $2x \operatorname{sen} 45^o \cot 30^o = \cos 60^o$
    Respuesta: $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

43. Probar la siguiente identidad:
    $\dfrac{\operatorname{sen} 30^o}{\cos 45^o} - \cos 60^o \tan 30^o = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

44. Hallar el valor númerico de la expresión: $\tan 60^o - \cot^2 45^o \cos 30^o$
    Respuesta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

45. Hallar el valor númerico de la expresión $\dfrac{\operatorname{sen} 45^o}{\tan 45^o} - \dfrac{\cos^2 60^o}{\operatorname{sen} 30^o}$
    Respuesta: $\dfrac{\sqrt{6}-3}{6}$

46. Probar la identidad: $\dfrac{4\ \tan^2 30^o \sec^2 45^o}{1 - \cot^2 60^o} = 3$

47. Probar la identidad: $\dfrac{3\operatorname{sen}45^o\operatorname{sen}^2 30^o}{\csc^2 30^o-\frac{1}{4}\cot^2 45^o}-\dfrac{2\sec 60^o\cos 45^o}{1-\cot^2 30^o}=-\dfrac{79\sqrt{2}}{10}$

48. Probar la identidad: $\dfrac{4\cos^2 30^o\operatorname{sen}^2 45^o\tan 60^o}{3\csc^2 30^o-2\cos^2 45^o}+\dfrac{\cos^2 60^o}{16\sec^2 60^o}=\dfrac{1+9\sqrt{3}}{48}$

49. Calcular las funciones trigonométricas de x sabiendo que: $\operatorname{sen}x=\dfrac{3}{5}$

50. Calcular las funciones trigonométricas de x sabiendo que: $\sec x=-1\dfrac{2}{3}$

51. Calcular las funciones trigonométricas de x sabiendo que: $\cos x=-\dfrac{20}{29}$

52. Calcular las funciones trigonométricas de x sabiendo que: $\operatorname{sen}x=-\dfrac{2}{7}$

53. Calcular las funciones trigonométricas de x sabiendo que: $\tan x=2\frac{2}{5}$

5.4. IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONO MÉTRICAS

5.4.1. Expresión de una función en términos de las restantes

5.4.2. Funciones trigonométricas de la suma y diferencia

5.4.3. Funciones trigonométricas de los múltiplos de un ángulo

5.4.4. Ecuaciones trigonométricas

5.4.5. Resolución de triángulos

5.4.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\cos a=\dfrac{8}{17}$, $\csc b=5\dfrac{5}{4}$, hallar $\operatorname{sen}(a+b)$ y $\tan(a-b)$

   Respuesta: $\dfrac{77}{85}$; $\dfrac{13}{85}$.

2. Si $\tan x = \dfrac{2}{11}$, $\tan y = \dfrac{24}{7}$,hallar $\tan(x-y)$ y $\cot(x+y)$
   Respuesta: $-2; \dfrac{29}{278}$

3. Si $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$, $\cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, hallar $\cos(x+y)$ y $\tan(x-y)$. Sabiendo que x es un ángulo del segundo cuadrante e y del tercer cuadrante.
   Respuesta: $-1; -\sqrt{3}$

4. Probar que:
   a) $\dfrac{\cos(x-y)}{\cos x \operatorname{sen} y} = \tan x + \cot y.$
   b) $\dfrac{\tan(x-y) + \tan y}{1 - \tan(x-y)\tan y} = \tan x.$

5. Hallar $\operatorname{sen} 75^o$, usando $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ y las funciones de $45^o\,, 30^o$.

6. Si $\tan x = \dfrac{3}{4}$ y $\tan y = \dfrac{7}{24}$, hallar $\operatorname{sen}(x+y)$ y $\cos(x+y)$ cuándo x y y son ángulos agudos
   Respuesta: $\operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{4}{5}$, $\cos(x+y) = \dfrac{3}{5}$.

7. Hallar $\cos(210^o + A)$ si $\sec A = -\sqrt{3}$ y A termina en el segundo cuadrante.
   Demostrar que:

8. $\operatorname{sen}(45^o + x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$

9. $\operatorname{sen}(y + 135^o) = \dfrac{\cos y - \operatorname{sen} y}{\sqrt{2}}.$

10. Hallar el $\operatorname{sen} 15^o$, usando las funciones de de 45^o y 30^o.
    Respuesta: $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

11. Hallar $\operatorname{sen}(x-y)$ y $\cos(x-y)$, sabiendo que $\tan x = \dfrac{4}{3}$ y $\tan y = \dfrac{3}{4}$, y que x termina en el tercer cuadrante e y en el primero.
    Respuesta: $\operatorname{sen}(x-y) = -\dfrac{7}{25}$, $\cos(x-y) = -\dfrac{24}{25}$.

12. $\cos(x-315^o) = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} y}{\sqrt{2}}$

13. $\cos(30^o + y) - \cos(30^o - y) = -\operatorname{sen} y$.

14. $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$.

15. Hallar $\tan 75^o$ conocidas las funciones de 45^o y 30^o.
Respuesta: $2+\sqrt{3}$.

16. Hallar $\tan(x+y)$ y $\tan(x-y)$, teniendo como datos $\tan x = \dfrac{1}{2}$ y $\tan y = \dfrac{1}{4}$.
Respuesta: $\dfrac{6}{7}$, $\dfrac{2}{9}$.
Demostrar que:

17. $\tan(A-60^o) = \dfrac{\tan A - \sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan A}$.

18. $\tan x + \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}$.

19. $\tan(x+45^o) + \cot(x-45^o) = 0$.

20. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 75^o considerando a dicho ángulo como la suma: $30^o + 45^o$.
Respuesta: $\operatorname{sen} 75^o = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$, $\cos 75^o = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\tan 75^o = 2+\sqrt{3}$, $\csc 75^o = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $\sec 75^o = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, $\cot 75^o = 2-\sqrt{3}$

21. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo de 15^o considerando a dicho ángulo como la diferencia : $60^o - 45^o$
Respuesta: $\operatorname{sen} 15^o = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, $\cos 15^o = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$, $\tan 15^o = 2-\sqrt{3}$, $\csc 15^o = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, $\sec 15^o = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $\cot 15^o = 2+\sqrt{3}$

22. Sabiendo que: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ calcular: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$
Respuesta: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{2\sqrt{30}+1}{12}$; $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \dfrac{2\sqrt{30}-1}{12}$

23. Sabiendo que: $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\cos\beta = \dfrac{7}{25}$ calcular: $\cos(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$
Respuesta: $\cos(\alpha+\beta) = -\dfrac{44}{125}$; $\cos(\alpha-\beta) = \dfrac{4}{5}$

24. Determinar el ángulo x del 2^{do} cuadrante que verifica la siguiente ecuación:
$$\frac{\operatorname{sen}(x-30^o)}{\tan(x+180^o)} = \sqrt{3}\cos x$$
Respuesta: $x = 150^o$
Verificar las siguientes identidades:

25. $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} - \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \tan\alpha - 1$

26. $\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$

27. Si $\operatorname{sen} a = \dfrac{12}{13}$, hallar las funciones de $2a$

28. Dado $\cos x = \dfrac{1}{2}$, hallar $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$.
Respuesta: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$.

29. Dado $\tan a = -1\frac{1}{3}$, Hallar $\cos(2a)$ y $\cot(2a)$ siendo a del cuarto cuadrante.
Respuesta: $-\dfrac{7}{25}$; $\dfrac{7}{24}$.

30. Dado $\operatorname{sen} x = -\dfrac{3}{5}$, siendo x del tercer cuadrante, hallar $\tan(3x)$.
Respuesta: $-2\dfrac{29}{44}$

31. Sabiendo que $\tan x = 2$ y que x está en el tercer cuadrante, hallar $\operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \tan 2x$.
Respuesta: $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{4}{5}, \cos 2x = -\dfrac{3}{5}, \tan 2x = -\dfrac{4}{3}$

32. Si A está en el tercer cuadrante y $\operatorname{sen} A = -\dfrac{3}{5}$, hallar

a) $\cos(90^o + A)$. Respuesta: $\frac{3}{5}$.

b) $\cot(180^o - 2A)$. Respuesta: $-\frac{7}{24}$.

c) $\sec(270^o - 2A)$. Respuesta: $-\frac{25}{24}$.

Resolver las siguientes ecuaciones para ángulos positivos menores de 360^o

33. $3\operatorname{sen} x = 2 - 2\operatorname{sen}^2(x)$ $30^o, 150^o$

34. $\cos^2 x - \frac{1}{2} = \operatorname{sen}^2 x$ Respuesta: $30^o, 150^o, 210^o, 330^o$.

35. $\cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ Respuesta: $30^o, 180^o$

36. $\sec(2x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ Respuesta: $30^o, 150^o, 270^o$.

Resolver las siguientes ecuaciones para valores de x comprendidos entre 0^o y 360^o :

37. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$ Respuesta: 30^o, $150^o, 210^o, 330^o$.

38. $\tan^2 x - 3 = 0$. Respuesta: 60^o, 120^o, 240^o, 300^o.

39. $\operatorname{sen}^2 2x - 1 = 0$. Respuesta: 45^o, 135^o, 225^o, 315^o.

40. $\cot^2 \frac{x}{2} = 3$. Respuesta: 60^o, 300^o.

Hallar, en radianes, todos los ángulos comprendidos entre 0 y 2π que satisfacen a las siguientes ecuaciones:

41. $(\tan x + 1)(\sqrt{3}\cot x - 1) = 0$. Respuesta: $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

42. $2\cot\theta \operatorname{sen}\theta + \cot\theta = 0$.

Resolver las siguientes ecuaciones para valores del ángulo comprendido entre 0^o y 360^o.

43. $4\sec^2 y - 7\tan^2 y = 3$. Respuesta: 30^o, 150^o, 210^o, 330^o.

44. $\operatorname{sen} x + \cos x = 1.$

45. $\cot^2\theta - 3\csc\theta + 3 = 0.$ Respuesta: $30^o,\ 90^o,\ 150^o.$

46. $\tan^2 x + \cot^2 x - 2 = 0.$

47. $\cos 2x + \cos x = -1.$ Respuesta: $90^o,\ 120^o,\ 240^o,\ 270^o.$

48. $\operatorname{sen}(30^o + x) - \cos(60^o + x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Respuesta: $210^o,\ 330^o.$

49. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x.$ Respuesta: $0^o,\ 360^o.$

50. $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + \cos x = 1.$

51. $\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x = 0.$ Respuesta: $204^o28',\ 335^o32'.$

52. $\sec^2 x - 4\tan x = 0.$

53. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0.$
Respuesta: $0^o,\ 90^o,\ 120^o,\ 180^o,\ 240^o,\ 270^o, 360^o.$

54. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0.$

55. $\operatorname{sen} 4x - \cos 3x = \operatorname{sen} 2x.$
Respuesta: $30^o,\ 90^o,\ 150^o,\ 210^o,\ 270^o,\ 330^o.$

56. El extremo de un poste que partió dista $8{,}45\,m.$ de la base del poste y forma con el suelo un ángulo de $40^o28'$. Hallar la altura original del poste.
Respuesta: $18{,}31\,m.$

57. En un triángulo ABC, $A = 60^o, a = 8\,m., b = 6\,m.$. Calcular c usando la ley de los cosenos.
Respuesta: $9{,}08\,m.$

58. Calcular qué longitud debe tener una escalera, para que, apoyada en la pared alcance una altura de $2{,}85\,m.$ al formar con el plano de la base un ángulo de $58^o1'$
Respuesta: $3{,}36\,m.$

59. Una de las diagonales de un rombo es de $30\,cm$. y forma con uno de los lados del mismo un ángulo de $25^o42'11''$. Calcular la otra diagonal y el perímetro del rombo.
    Respuesta:
    diagonal: $14,44\,cm$.
    perímetro: $66,588\,cm$.

60. La altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, determina sobre ella dos segmentos de $2,5\,cm$ y $4,9\,cm$ respectivamente. Calcular cada uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo dado.
    Respuesta: $54^o27'44''$ y $35^o32'16''$.

61. Hallar el área de un triángulo isóseles de 48.54m. de altura, siendo el ángulo del vértice $26^o48'$.
    Respuesta: 561,12 m^2.

62. El lado de un triángulo equilátero mide 384.06m. Hallar su área
    Respuesta: 63870 m^2.

Bibliografía

[1] Aurelio Baldor, ARITMÉTICA TEÓRICO PRÁCTICA. PUBLICACIONES CULTURAL.

[2] Aurelio Baldor, ÁLGEBRA. PUBLICACIONES CULTURAL.

[3] H.S.Hall, S.R. Knighht, ÁGEBRA SUPERIOR. EDITORIAL UTEHA

[4] Aurelio Baldor, GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA. PUBLICACIONES CULTURAL.

[5] Bruño,GEOMETRÍA CURSO SUPERIOR. EDITOTRIAL BRUÑO.

[6] Granville W. A- y otros, TRIGONOMETRÍA PLANA Y ESFERA. EDITORIAL UTEHA

[7] Mario Silva Santiesteban, ARITMÉTICA TEORÍA Y PR'CTICA

[8] Guillermo Martinez Gavaldoni, ARITMÉTICA PRÁCTICA.

[9] Hall Yknight, ÁLGEBRA SUPERIOR

[10] N.Antonov, V. Nikitin, 100 PROBLEMAS DE ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA.

[11] Arismendiz Campos, 1000 PROBLEMAS DE ÁLGEBRA.

[12] Rubeén Alva Cabrera, TRIGONOMÉTRIA CONTEMPORANEA.

[13] Cesar Vallejo, SERIE DE PROBLEMAS SELECTOS.

[14] Edwin M. Hemmerling, GEMETRÍA ELEMNTAL. EDITORIAL LIMUSA.

[15] Celina H. Reppette, TRIGONOMETRÍA PLANA Y ESFÉRICA

[16] Nathan O. Niles, TRIGONOMETRÍA PLANA.