TERCERA ETAPA DEPARTAMENTAL

Nº Examen

AREA: MATEMATICAS

DEPARTAMENTO: ………………………

20 de Agosto de 2011

SOLUCIONARIO 2º DE SECUNDARIA

PREGUNTAS DE OPCION MULTIPLE (Debe marcar la respuesta correcta)

1. (10 pts) La ecuación $3^{x+2}+9^{x+1}=810$ tiene como una de sus soluciones a un número

a) menor que 3 b) mayor que 6 c) impar **d) par** e) ninguna de las anteriores

NOTA. Se acepta a cualquiera de las dos como valida, la solución es x=2

2. (10 pts) Si las edades de Juan y María son números de dos dígitos. Cuántos años tienen, si al escribir un número a continuación del otro se tiene un cuadrado perfecto? Se sabe que la edad de Juan es <20 y es múltiplo de 3 y la de María es un cuadrado perfecto.

a) Juan tiene 15 y María 36 **b) Juan tiene 12 y María 25** e) ninguna de las anteriores

3. (10 pts) En la fiesta de cumpleaños de Andrés, los niños comieron 20 chocolates entre todos, 2 niños comieron exactamente 3 chocolates cada uno, más de la mitad de niños comieron exactamente 2 chocolates y el resto de los niños comieron exactamente un chocolate. ¿Cuántos niños había en la fiesta de Andrés?

   a) 12 b) 14 **c) 10** d) Ninguna de las anteriores

4. (10 pts) Se sabe que el polinomio p(x) = x^3-x+k tiene tres raíces diferentes que son números enteros. Determine el valor de k

   a) 2 **b) 0** c) 1 d) Ninguna de las anteriores

PREGUNTAS DE DESARROLLO (Debe realizarlas en esta misma hoja)

5. (15 pts) Si $\log_2(2^x-8)-\log_2(2^x-5)=x$ el valor de x es :

SOLUCION

$$\log_2(2^x-8)-\log_2(2^x-5)=x$$

$$\log_2\left(\frac{2^x-8}{2^x-5}\right)=x \Rightarrow \left(\frac{2^x-8}{2^x-5}\right)=2^x$$

Si a= 2^x

$$a-8=a(a-5)\Rightarrow a-8=a^2-5a \Rightarrow a^2-6a+8=0 \Rightarrow (a-4)(a-2)=0$$

$$a=4 \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2$$

$$a=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x=1$$

No se acepta ninguna solución, porque el argumento de los logaritmos serian números negativos

6. (15 pts) A una fiesta asistieron algunos hombres y algunas mujeres. Si se encuentran dos hombres se saludan con un apretón de manos. Pero si se encuentra un hombre con una mujer o se encuentran dos mujeres, entonces se saludan con un beso en la mejilla. Se sabe que todas las personas que asistieron a la fiesta se saludaron entre sí (dos a dos) y que el número de hombres excedió en cuatro al número de mujeres. Si el número de besos en la mejilla excedió en 75 al número de apretones de manos, ¿cuántas personas asistieron a la fiesta?

SOLUCIÓN

Sea h el número de hombres y m el número de mujeres.
Un apretón de manos se realiza entres dos hombres cualesquiera, luego, el número de apretones de manos es el mismo número de formas en que se puede escoger dos hombres, este número es igual a $\binom{h}{2}$.
Un beso en la mejilla se da entre dos mujeres o entre un hombre y una mujer.
De forma similar al conteo anterior, el número de besos en la mejilla entre dos mujeres es $\binom{m}{2}$, y el número de besos en la mejilla entre un hombre y una mujer es hm. Luego, el número de besos en la mejilla fue $\binom{m}{2} + hm$. Siguiendo las condiciones del problema, tenemos:

$$h = m + 4 \qquad (1)$$
$$\binom{m}{2} + hm = 75 + \binom{h}{2} \qquad (2)$$

Reemplazamos (1) en (2), y obtenemos:

$$\binom{m}{2} + (m+4)m = 75 + \binom{m+4}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(m-1)}{2} + (m+4)m = 75 + \frac{(m+4)(m+3)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 - m + 2m^2 + 8m = 150 + m^2 + 7m + 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 = 162$$

De donde $m = 9$ y $h = m + 4 = 13$. En consecuencia, asistieron a la fiesta $h + m = 13 + 9 = 22$ personas.

7. (15 pts) Hallar el residuo que resulte al dividir el producto de los 100 primeros números primos entre 4.

Resp. El residuo siempre es 2

8. (15 pts) Los números reales a, b y c son tales que $a + b + c = \mathbf{6}$ y
$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \mathbf{1}$$

Hallar $\dfrac{bc}{a+b} + \dfrac{ca}{b+c} + \dfrac{ab}{c+a}$

SOLUCIÓN

Modifiquemos uno de los datos del problema:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=1$$

$$\left(1-\frac{b}{a+b}\right)+\left(1-\frac{c}{b+c}\right)+\left(1-\frac{a}{c+a}\right)=1$$

$$\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}=1 \qquad (1)$$

Sea S el resultado pedido, sumamos al lado izquierdo 6 y al lado derecho sumamos $b+c+a$, que por dato del problema son iguales:

$$S=\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{c+a}$$

$$\Longrightarrow \quad S+6=\frac{bc}{a+b}+b+\frac{ca}{b+c}+c+\frac{ab}{c+a}+a$$

$$\Longrightarrow \quad S+6=\frac{b(a+b+c)}{a+b}+\frac{c(a+b+c)}{b+c}+\frac{a(a+b+c)}{c+a}$$

factorizando:

$$S+6=(a+b+c)\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$

luego, por el dato del problema y por (1), tenemos que $S+6=6\times 2$, lo que implica que $S=6$.