

## **Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales**

**Juan C. Moreno-Marín**

**IDEAS  
Y  
RECURSOS**

La introducción de los fractales lineales en las matemáticas de secundaria a través de una experiencia como ésta resulta sencillo y muy interesante. El diseño, la construcción y el estudio de figuras fractales planas constituyen el núcleo de la propuesta. En este trabajo se ordenan, describen y comentan muchas de las actividades realizadas con los estudiantes durante la experiencia.

**U**NA PARTE FUNDAMENTAL de la matemática, la geometría, estudia las propiedades de las formas y del espacio. En ella, la concepción geométrica más moderna, la geometría fractal se ha convertido en herramienta imprescindible para la descripción de objetos irregulares y el análisis de numerosos fenómenos complejos, aportando modelos matemáticos a muchas estructuras naturales.

Desarrollada a partir de la propuesta de B. Mandelbrot en los años setenta, los fractales lineales forman un grupo fundamental en esta geometría. Se describen mediante algoritmos de construcción o reglas de sustitución, que sólo cuando se aplican iterativamente a un objeto geométrico dan lugar al desarrollo de estructuras fractales. Un fractal lineal puede definirse con un conjunto de transformaciones lineales afines: reducciones, desplazamientos, rotaciones, reflexiones, y combinaciones de éstas.

Los fractales lineales son autosimilares, es decir, un pequeño fragmento cualquiera de ellos contiene una figura que, con el adecuado cambio de escala, es idéntica a la figura completa. Esto supone que cualquier parte de un fractal, por pequeña que sea, contiene toda la información relativa al mismo. Esa interrelación a distintas escalas se describe matemáticamente con el concepto de dimensión fractal.

Se presenta en este artículo una nueva propuesta para el aprendizaje de la geometría en la educación secundaria. Con esta experiencia se quiere contribuir a la enseñanza de las matemáticas, y en particular de la geometría, partiendo de motivaciones intuitivas y relaciones con lo concreto. Participando de muchas de las reflexiones renovadoras sobre la enseñanza de la geometría (Sánchez Vázquez, 1997; Figueiras, 2000), se propone aquí un conjunto amplio de actividades para el estudio de los fractales lineales, aportando ideas enriquecedoras con recursos didácticos al alcance de todos.

Esta propuesta quiere participar en el movimiento de recuperación de la enseñanza de la geometría, renovando su didáctica con motivaciones concretas mediante una aplicación de total actualidad. La incorporación de los fractales a las matemáticas escolares es muy interesante, pues combinando curiosidad, sencillez y belleza, permite enfocar la actividad en el aula como de búsqueda e investigación. Más aún, en la educación secundaria obligatoria por ser el momento en el que se inicia el desarrollo de la capacidad de formalizar y se hace posible algún grado significativo de abstracción.

Se pretende en este caso reforzar la introducción a la geometría utilizando las transformaciones lineales afines en el plano para definir formas fractales. La utilización de este tema novedoso contradice la concepción de las matemáticas como una ciencia completa desde hace tiempo.

## La experiencia de construir y estudiar fractales

Se trata de elaborar figuras planas de grandes dimensiones, hasta de 2 m<sup>2</sup>, en las que utilizando la propiedad de similaridad –formadas por partes semejantes entre sí–, se ha conseguido representar un fractal conexo. Las figuras presentan una etapa intermedia en la formación del fractal, mientras que también son una representación de la figura límite o atractor del fractal, con una determinada resolución, y por lo tanto propiamente autosimilares.

Estas estructuras tan complejas aúnan la sencillez y precisión de quedar descritas matemáticamente mediante un pequeño número de transformaciones lineales, y la belleza del resultado cuando estas transformaciones se aplican numerosas veces sobre un objeto inicial. Los fractales existen sólo en su estado infinito, pero en la práctica nos conformamos con visualizarlos en alguna etapa finita de su construcción.

Los objetivos de esta experiencia son conocer las propiedades básicas de los fractales y utilizarlos para el trabajo matemático. Se introducen las transformaciones de forma práctica, por el movimiento de las figuras sobre el papel, y a partir de las figuras obtenidas se han podido desarrollar muchos contenidos geométricos y algebraicos propios del currículo de matemáticas de secundaria. Son numerosas las actividades y ejercicios interesantes, desde el cálculo numérico en los primeros cursos, a la expresión algebraica en los últimos. El número de elementos geométricos que constituyen la figura en cada etapa de la formación del fractal –vértices, lados, triángulos, cuadrados–, da lugar a sucesiones geométricas, y las características de estos elementos –longitudes de los lados y de las áreas– pueden expresarse algebraicamente. Se revisan los límites de estas sucesiones para un número muy grande de eta-



Figura 1. Estudiantes de bachillerato posando con el resultado de su trabajo, un triángulo de Sierpinski

*La incorporación de los fractales a las matemáticas escolares es muy interesante, pues combinando curiosidad, sencillez y belleza, permite enfocar la actividad en el aula como de búsqueda e investigación.*

pas y su relación con la dimensión fractal de cada figura.

Para la aplicación de esta propuesta se han preparado y utilizado numerosas actividades adaptables a diferentes niveles educativos. En su realización, estas actividades se secuencian en tres etapas que se exponen a continuación:

- 1.º Las transformaciones geométricas y el diseño de patrones.
- 2.º Taller de construcción de las figuras.
- 3.º Características de las figuras: expresiones algebraicas y representaciones gráficas.

### Primera etapa. Las transformaciones geométricas y el diseño de patrones

La expresión matemática más sencilla de un fractal lineal corresponde a lo que Michael Barnsley (1993) introdujo con el nombre de sistemas de función iterada o IFS (*Iterated Function Systems*). Un IFS es un conjunto de transformaciones afines contractivas. Cada conjunto de estas transformaciones define una imagen fractal denominada atractor del IFS, que siempre existe y es única.

La transformación afín general en el plano se compone de una transformación lineal, que deforma el plano res-



Figura 2. Las Aspas de Vicsek montadas por los estudiantes de bachillerato

pecto al origen, y de una traslación. Una transformación se llama *contractiva* si reduce la distancia entre un par de puntos cualesquiera.

Una transformación lineal afín bidimensional  $W$  se representa algebraicamente como  $W(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$ , donde  $a, b, c, d, e$  y  $f$  son números reales. Esta transformación gira, desplaza y cambia la escala de un objeto en las direcciones  $X$  e  $Y$  del plano euclideo. En esta experiencia se utilizan las transformaciones afines más sencillas, las transformaciones de similitud, que se caracterizan porque tanto el factor de escala como los ángulos de rotación son iguales para cualquier dirección en el plano, conservando los ángulos, además de transformar rectas en rectas.

Para el diseño de fractales con estas transformaciones, se buscaron como iniciadores o figuras de partida las formas planas más elementales que pudieran dividirse en copias reducidas de sí mismas, y produjeran una teselación del plano, seleccionando el triángulo y el rectángulo. Como además la variedad de fractales aumentaba con aquellos iniciadores que presentaran simetrías de giro que permitieran aplicar rotaciones a las figuras, se han elegido el cuadrado y el triángulo equilátero.

El generador es la figura que se obtiene al aplicar por primera vez las reglas de sustitución o algoritmo fractal sobre el

*La malla es una herramienta geométrica cotidiana además de un valioso instrumento para la enseñanza y el aprendizaje en geometría.*

iniciador, y describe las transformaciones que definen el fractal. Para el diseño de los generadores se han buscado las reglas de sustitución más sencillas. Se han utilizado hojas de papel con malla triangular y cuadrada para obtener generadores.

La malla es una herramienta geométrica cotidiana además de un valioso instrumento para la enseñanza y el aprendizaje en geometría. En ella se seleccionan aquellas transformaciones que puedan representarse con algunos de sus elementos. El conjunto de transformaciones representado provoca la elección del tamaño del iniciador para que el resultado de la menor de las transformaciones coincida con un elemento de la malla.

Aprovechando que se pueden definir sobre la malla triángulos equiláteros o cuadrados subdivididos en otros semejantes, se seleccionan algunos de sus elementos que definirán las transformaciones de similitud: las contracciones con factor de escala 2, 3 o 4, y las traslaciones se describen dividiendo el iniciador cuadrado o triangular en  $2^2$ ,  $3^2$  o  $4^2$  partes iguales. Otras transformaciones que fácilmente pueden incorporarse son las rotaciones de múltiplos de  $90^\circ$  sobre los cuadrados, o de  $120^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $240^\circ$  sobre los triángulos equiláteros. Al dividir un cuadrado en subcuadrados iguales de lados paralelos, o un triángulo equilátero en subtriángulos iguales, hay diferentes maneras de seleccionar un subconjunto de entre ellos que pueda definir un algoritmo fractal, pero las posibilidades se multiplican si extendemos la selección de elementos fuera del polígono original. La actividad que se les propone a los estudiantes es la del diseño de algoritmos fractales distintos con este tipo de transformaciones.

Si el generador del fractal es una figura conexa, de una sola pieza, la iteración posterior de esas mismas transformaciones da lugar a que la figura, en cualquier etapa que se represente, lo siga siendo. Mientras que si el generador es desconexo, las etapas posteriores también lo son y el fractal consiste en un conjunto cantoriano de puntos pulverulento. En esta experiencia, y para alcanzar los objetivos que se pretenden, se han utilizado solamente formas conexas.

En la figura 3 se presentan algunos resultados de esta actividad de diseño, los iniciadores, generadores y la segunda etapa de formación de algunos de los fractales que posteriormente se han utilizado. En la parte superior se muestra la formación del fractal Belinda; en la segunda fila, la alfombra de Sierpinski; en la tercera, el copo de estrellas; y en la parte inferior las aspas de Vicsek. Muchos de los generadores, al no incluir rotaciones en sus transformaciones, se obtienen también eliminando algunas partes del iniciador, por lo que el algoritmo fractal se puede describir como un proceso de eliminación de área.

Una actividad en clase consiste en proponer a los estudiantes que describan de esta manera algunos de los algoritmos diseñados que se utilizarán en el taller, en particu-

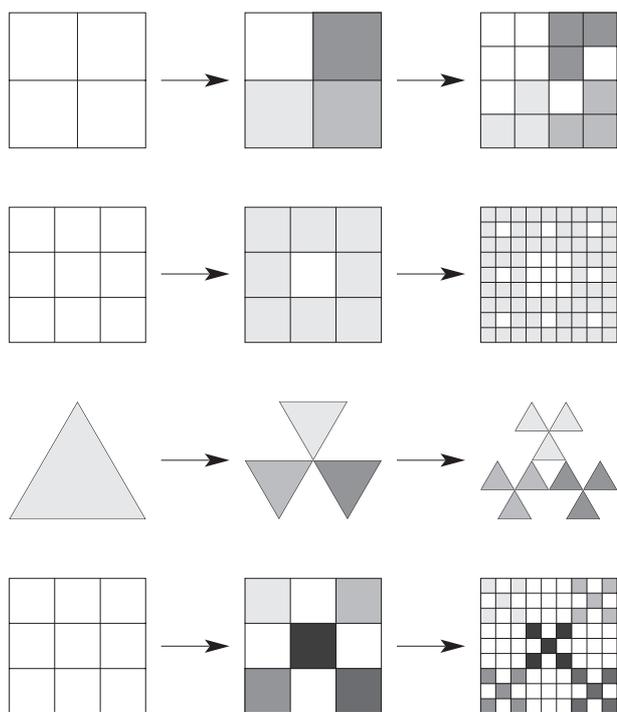


Figura 3. Diseño de cuatro algoritmos fractales

lar los de los fractales trisección, punta de flecha, triángulo de Sierpinski, aspas y alfombra, es decir, aquellos cuyas transformaciones consisten sólo en contracciones y traslaciones. La descripción de los generadores de fractales es conveniente como ejercicio de geometría y de rigor en la expresión. Se utiliza aquí la expresión verbal de las experiencias como uno de los contenidos procedimentales básicos de la geometría y de las matemáticas, porque incide de manera importante en el objetivo educativo general del uso adecuado del lenguaje y la mejora en el dominio de la expresión.

Definir correctamente el algoritmo de generación consiste básicamente en mencionar el número de transformaciones que lo componen y sus características: la relación de semejanza o factor de escala con el iniciador, y sus posiciones relativas respecto a él, su traslación y/o rotación. Con estos datos es suficiente en casos como el actual, en los que se utilizan transformaciones de similitud, aunque no en general. La descripción de las transformaciones será a menudo oral, y a veces también escrita. En ambas los estudiantes aprenden a utilizar con precisión el lenguaje geométrico adecuado.

El teorema de la composición de Barnsley permite plantear otro problema: dada una forma geométrica  $L$  en el plano, buscar el conjunto de transformaciones, o IFS, para el cual  $L$  sea el atractor. El teorema dice que el IFS correspondien-

*Se utiliza aquí la expresión verbal de las experiencias como uno de los contenidos procedimentales básicos de la geometría y de las matemáticas, porque incide de manera importante en el objetivo educativo general del uso adecuado del lenguaje y la mejora en el dominio de la expresión.*



Figura 4. Estudiantes de la Universidad de Alicante durante la construcción de figuras fractales



Figura 5. Los estudiantes posan con algunas de las figuras realizadas

te a un atractor es el conjunto de transformaciones cuya composición de las imágenes de ese atractor bajo las transformaciones coincida consigo mismo.

Una vez que los estudiantes han diseñado generadores, en una nueva actividad se propone la realización del trabajo matemático en sentido inverso: se les presentan varios atractores fractales muy sencillos y se les pide que, interpretando sus características y utilizando el teorema, describan las transformaciones de similitud que los han generado. Este ejercicio ya presenta algunos de los resultados que se obtienen con la construcción de las figuras, además de reforzar en los estudiantes la manera de describir correctamente las transformaciones geométricas. El modelo para realizarlo se presenta en la figura 6. Se trata de una actividad de reconocimiento, frente a la actividad anterior de diseñar generadores de fractales. El hecho de trabajar alternando actividades de reconocer y de diseñar transformaciones, no sólo es una garantía para la adquisición

del conocimiento, sino que además equivale a practicar una evaluación constante dentro del mismo proceso de aprendizaje.

Los estudiantes de bachillerato, que ya tienen algunas nociones de cálculo matricial, y estudian en su primer curso la geometría analítica del plano, pueden

llegar a describir las transformaciones lineales en su notación matricial. Se expresan como  $W(P) = AP + t$ , donde  $A$  es una matriz real bidimensional  $2 \times 2$  y  $t$  es un vector columna  $2 \times 1$ .

Su representación matricial es:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix}$$

Alternativamente  $A$  puede escribirse de la forma

$$A = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) & -s \sin(\psi) \\ r \sin(\phi) & s \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

donde  $(r, \phi)$  y  $(s, \psi + \pi/2)$  son las coordenadas polares de los puntos  $(a, c)$  y  $(b, d)$  en las que pueden reconocerse las componentes de la transformación: el escalado de parámetros  $r$  y  $s$ , la rotación de los ejes cartesianos, de ángulos  $\phi$  y  $\psi$ , y la traslación dada por las coordenadas  $e$  y  $f$  (Barnsley, 1993).

Como ejemplo consideremos el sistema compuesto por las tres transformaciones  $W_1, W_2, W_3$  que definen el triángulo de Sierpinski, y cuyo código IFS se representa de la siguiente forma:

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$W_1$	0,5	0	0	0,5	0	0
$W_2$	0,5	0	0	0,5	1	0
$W_3$	0,5	0	0	0,5	1/2	$\sqrt{3}/2$

Está formado por tres copias de mitad de tamaño que su predecesora (coeficientes 0,5 en  $a$  y  $d$ ), no hay giros (ceros en  $b$  y  $c$ ), e incluye el desplazamiento a los vértices de un triángulo (coeficientes  $e$  y  $f$ ). La transformación  $W_1$  crea el triángulo de la izquierda,  $W_2$  el de la derecha, y  $W_3$  el superior del centro, resultando una manera muy compacta –con un código muy pequeño– de describir una figura tan detallada como el triángulo fractal.

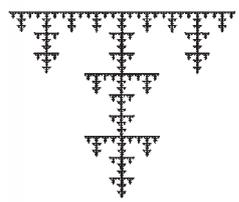
## Segunda etapa. Construcción de las figuras

### Taller de fractales

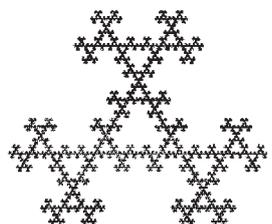
Se propone una actividad de taller, basada en la utilización de materiales geométricos muy sencillos. Con estos materiales se construyen modelos, es decir, realizaciones visibles que ponen de manifiesto las transformaciones y todas las propiedades geométricas de cada figura. Los modelos son el lenguaje de la geometría. La manipulación de los materiales es la ocasión para experimentar y después expresar propiedades geométricas, alcanzando los conceptos abstractos a partir de situaciones concretas.

**Generación de fractales**

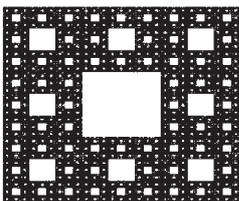
Explica cómo se ha generado cada una de las siguientes imágenes fractales. Para describir las transformaciones lineales te basta con obtener el número de copias, el factor de escala y las rotaciones si las hubiera.



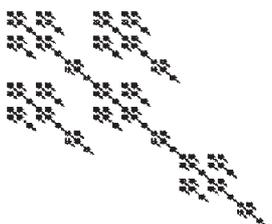
N.º transf.	Escala	Rotaciones



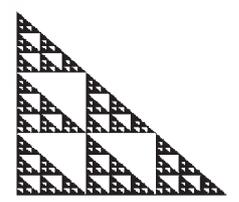
N.º transf.	Escala	Rotaciones



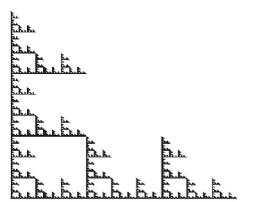
N.º transf.	Escala	Rotaciones



N.º transf.	Escala	Rotaciones



N.º transf.	Escala	Rotaciones



N.º transf.	Escala	Rotaciones

Figura 6. Modelo de la actividad de reconocimiento de algoritmos fractales

En el aula, la tarea de construcción que parece conceptualmente compleja se ha traducido en un ejercicio manual nada complicado. Con los generadores definidos, la elaboración de las figuras en papel es inmediata. Para esta etapa práctica se utilizan las mallas de papel, donde se seleccionan los elementos que definen el generador. Sobre una hoja A4 de papel se forma la primera etapa, la segunda y hasta la tercera etapa de la figura fractal, con sólo seleccionar más elementos en la disposición adecuada. El rellenado de los elementos de la malla se ha hecho con pegatinas de color de forma triangular o cuadrada como las que se utilizan en actividades propias de educación infantil.

Esta hoja de papel será el objeto generador de las etapas siguientes con un proceso de multiplicación tan sencillo como su reproducción con fotocopias. La similitud de estos fractales lineales hace que fotocopiando los patrones podamos montar las siguientes etapas del objeto, al mismo tiempo que la figura total aumenta su tamaño. Con tres copias del triángulo colocadas convenientemente obtenemos la etapa siguiente a doble tamaño que el patrón. Con nueve, una etapa más y otra vez duplicamos tamaño, y así hemos llegado a la etapa séptima de construcción del triángulo fractal. De forma parecida, con cinco copias del patrón de las aspas adecuadamente colocadas se obtiene la etapa siguiente y aumenta su tamaño al triple. Con veinticinco copias aumentamos una etapa más y volvemos a triplicar el tamaño, y en esta ocasión hemos llegado a la quinta etapa en la formación de las aspas fractales.

Una vez obtenidas en número y tamaño adecuado las copias necesarias de una determinada etapa de cada figura, la construcción termina con el recorte de estos patrones de papel, generalmente en hojas de tamaño A3, y su pegado en la posición precisa sobre el soporte definitivo, que a veces ha sido el cartón-pluma y otras veces delgadas planchas de conglomerado chapadas en blanco. Las figuras fractales siempre van acompañadas de una breve leyenda explicativa que describe el conjunto de transformaciones que la forman y muestra las primeras etapas de su formación.

En algunos casos se ha aprovechado que la fotocopidora permite reducir el tamaño de las copias, con lo que se obtienen numerosas etapas de la formación de un fractal sin que el tamaño total de la figura crezca, o por lo menos sin que resulte desorbitado. Las posibilidades experimentales de este procedimiento en la construcción de figuras fractales es enorme.

Es conveniente realizar estas actividades de taller en otros momentos que no sean los de la clase de matemáticas, preferentemente en el taller de plástica o en el marco de cualquier actividad cultural, como ocurrió en nuestro IES. En este sentido se considera que la expresión plástica es un lenguaje idóneo para la geometría. Quedan sin duda las otras dos etapas de la experiencia con sus actividades

*...permite relacionar la geometría con otras materias presentando a las matemáticas como un conjunto de áreas de conocimiento estrechamente entrelazadas entre sí y con otras diversas.*

para realizar en la clase de matemáticas, e incluso se necesita ayuda informática para la representación gráfica de las características de las figuras. Esto permite relacionar la geometría con otras materias presentando a las matemáticas como un conjunto de áreas de conocimiento estrechamente entrelazadas entre sí y con otras diversas.

### **Descripción de las figuras**

#### *El Triángulo de Sierpinski (figura 7)*

Es una de las figuras obtenidas, que recibe su nombre del matemático polaco Waclaw Sierpinski, quien lo propuso en 1915 para poner de manifiesto características geométricas extrañas, en este caso para demostrar que una curva puede cruzarse consigo misma en todos sus puntos. El triángulo de Sierpinski queda definido por un conjunto de tres transformaciones, que sobre cualquier objeto lo reducen a la mitad de su tamaño y colocan las copias en los tres vértices de un triángulo equilátero. También se genera conectando los puntos medios de los tres lados de un triángulo equilátero, seleccionando sólo los tres subtriángulos que se forman en las esquinas, y suprimiendo la cuarta parte central del mismo. Repitiendo este proceso de construcción, quitando fragmentos cada vez más pequeños una y otra vez, infinitas veces, se obtiene este fractal tan conocido.

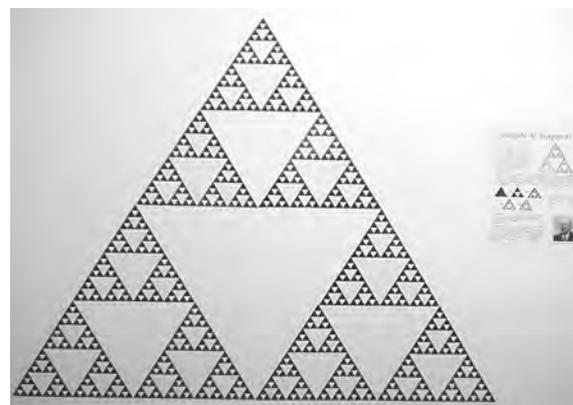


Figura 7. El triángulo de Sierpinski

### La Punta de Flecha (figura 8)

Se describe con cinco transformaciones que reducen a un tercio de tamaño, y colocan las copias alineadas sobre dos rectas perpendiculares. La figura se obtiene descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, dividiendo los lados en tres partes iguales y seleccionando sólo cinco subcuadrados dispuestos perpendicularmente, y eliminando los cuatro restantes.

### Las Aspas de Vicsek (figura 8)

Es otro de los fractales construidos, que recibe su nombre de Tamás Vicsek, matemático húngaro que propuso esta configuración fractal. La figura está definida por cinco transformaciones geométricas que reducen el objeto a la tercera parte de su tamaño y colocan las copias en los cuatro vértices y en el centro de un cuadrado. Experimentalmente la hemos conseguido descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, seleccionando sólo los cinco subcuadrados que se forman en las esquinas y el central, y suprimiendo los cuatro restantes.

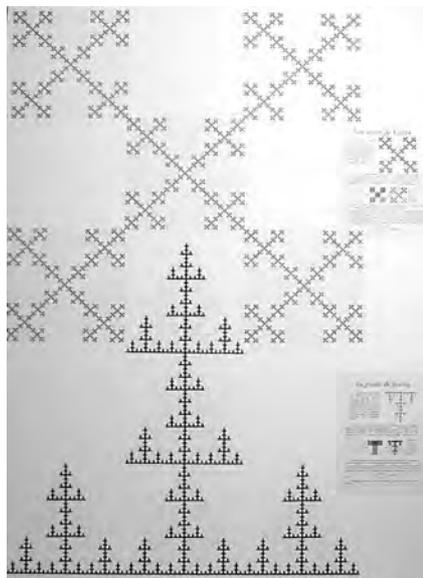


Figura 8. La punta de flecha y las aspas de Vicsek

### El copo de estrellas (figura 9)

Esta figura se obtiene con tres transformaciones lineales que reducen el objeto

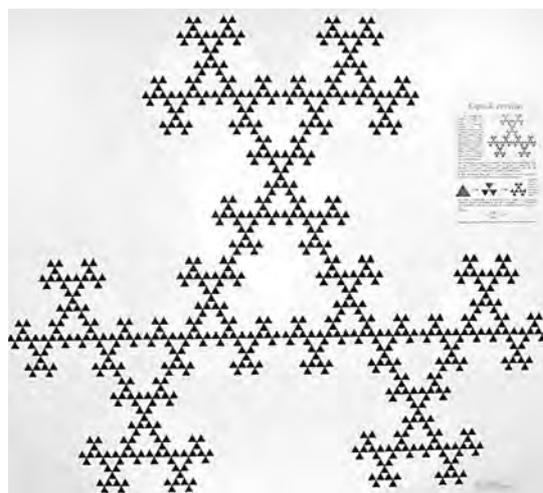


Figura 9. El Copo de Estrellas

*La alfombra  
[de Sierpinski]  
se obtiene  
descomponiendo  
un cuadrado  
en nueve  
subcuadrados  
iguales,  
y seleccionando  
sólo los ocho  
subcuadrados  
exteriores.*

a la mitad de su tamaño, colocan las copias en los vértices de un triángulo equilátero (hasta aquí como para el triángulo fractal), y las gira 180°.

### La alfombra de Sierpinski (figura 10)

Se genera con ocho transformaciones que reducen la figura a un tercio de su tamaño y las coloca en todos los subcuadrados exteriores que resultan al dividir un cuadrado por los tercios de sus lados con segmentos paralelos a ellos. La alfombra se obtiene descomponiendo un cuadrado en nueve subcuadrados iguales, y seleccionando sólo los ocho subcuadrados exteriores.

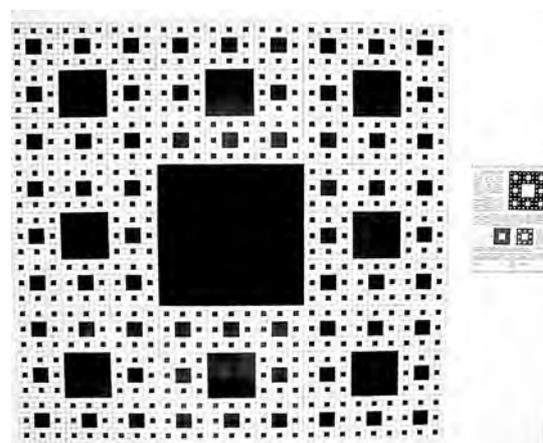


Figura 10. La alfombra de Sierpinski

### Las Columnas (figura 11)

Se describen con tres transformaciones similares a las anteriores. Son reducciones a mitad de tamaño, traslaciones a los vértices de un triángulo rectángulo y rotación de 180°

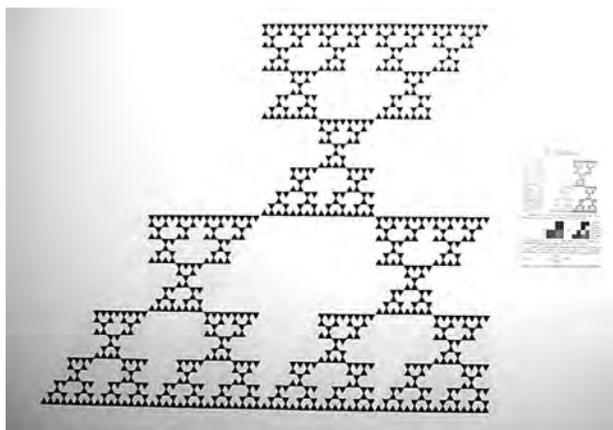


Figura 11. Las columnas

de la copia colocada en el vértice superior. Este fractal se obtiene descomponiendo un cuadrado en cuatro subcuadrados iguales de mitad de tamaño, seleccionando tres de ellos y suprimiendo el cuarto. El subcuadrado superior sufre una rotación de  $180^\circ$ .

#### Belinda (figura 12)

Esta figura queda definida por tres transformaciones que reducen el objeto a mitad de tamaño, trasladan las copias a tres vértices consecutivos de un cuadrado, y gira  $90^\circ$  la copia del vértice superior. La figura se obtiene descomponiendo un cuadrado en cuatro subcuadrados iguales de mitad de tamaño y seleccionando sólo tres de ellos. El subcuadrado superior sufre además una rotación de  $90^\circ$  en sentido opuesto al de las agujas del reloj.

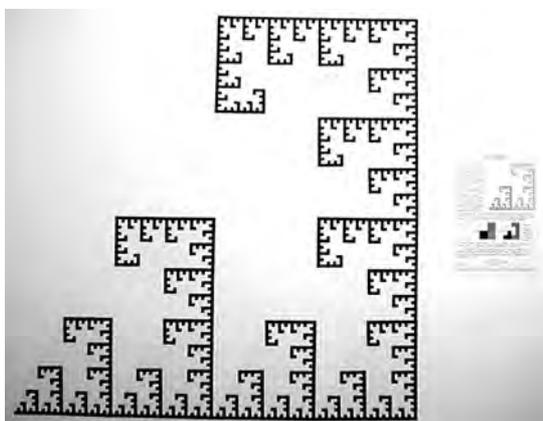


Figura 12. Belinda

#### La Trisección (figura 13)

Se genera con seis transformaciones, combinaciones de reducción a un tercio de tamaño y traslación de las copias a todos los subtriángulos externos, que resultan al dividir un triángulo equilátero por los tercios de sus lados con

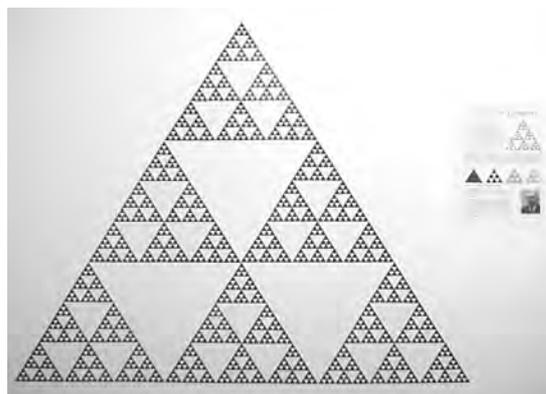


Figura 13. La trisección

segmentos paralelos a los mismos. Se obtiene dividiendo el triángulo en nueve subtriángulos iguales y eliminando los tres interiores cuyos lados no coinciden con los del triángulo.

*El trabajo geométrico sobre fractales, que habitualmente es bidimensional, conviene completarlo con la manipulación de algún objeto tridimensional que ayude a su comprensión.*

#### **Fractal tridimensional**

El trabajo geométrico sobre fractales, que habitualmente es bidimensional, conviene completarlo con la manipulación de algún objeto tridimensional que ayude a su comprensión. El poliedro más simple es el tetraedro, y otro muy interesante el octaedro. Con un octaedro y cuatro tetraedros de la misma arista se forma un tetraedro de doble arista, y de esta manera se puede manipular el generador del tetraedro fractal de Sierpinski.

La regla de generación consiste en cortar un tetraedro regular con planos paralelos a las caras que pasen por los puntos medios de las aristas, seleccionando los cuatro nuevos tetraedros de mitad de tamaño formados en los vértices y eliminando el resto del sólido, un octaedro regular. Con este algoritmo se generan cuatro nuevos tetraedros, y aplicándoles de nuevo la regla a cada uno se obtienen 16 tetraedros, todos del mismo tamaño. La aplicación recursiva de esta regla, quitando octaedros cada vez más pequeños una y otra vez, da lugar a la forma fractal.

Muchos estudiantes habrán construido alguna vez un poliedro a partir de su desarrollo plano, y algunos de ellos un tetraedro. Resulta interesante que com-

prueben que puede obtenerse a partir de dos desarrollos distintos, en una investigación para buscar sobre la malla triangular todos los distintos tetra-diamantes, y entre ellos los dos que al plegarse forman el tetraedro (Bolt, 1998).

En la construcción del fractal se ha utilizado la malla triangular para recortar el desarrollo plano de un tetraedro cuyas aristas midan  $2^n$  veces la arista de la celdilla unidad. Antes de doblar y pegar las pestañas del cuerpo geométrico se han marcado sobre sus caras, recubriendo con un adhesivo de color, los triángulos que permanecerán en ella hasta la etapa  $n$  de la generación del triángulo de Sierpinski. Se obtiene así una imagen de la pirámide fractal hasta esa etapa  $n$  de su formación, si se imagina que el papel blanco desaparece y sólo permanecen los pequeños tetraedros coloreados. Con aristas de 16 celdillas se obtiene la cuarta etapa de la formación del fractal, pero la colocación de cuatro de estos tetraedros da lugar a la etapa siguiente con un tetraedro de doble arista, como se muestra en la figura 14, y así sucesivamente.

Como todos los fractales lineales, el tetraedro de Sierpinski queda totalmente definido mediante un conjunto de transformaciones. Las cuatro transformaciones tridimensionales que reducen la figura a mitad de tamaño y colocan las copias en los vértices del tetraedro, que también se pueden expresar matricialmente constituyendo un IFS, en el que

*Las figuras formadas nos permitirán utilizar su autosimilaridad y las regularidades que muestran para la búsqueda de reglas numéricas que evidencien las relaciones entre los modelos geométricos y los modelos numéricos.*

cada una se representa por una relación lineal entre las coordenadas euclideas de cada punto del espacio  $(x, y, z)$  con otras  $(x', y', z')$ :

$$\begin{pmatrix} \hat{E}x' \\ \hat{A}y' \\ \hat{E}z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{E}a & b & c \\ \hat{A}d & e & f \\ \hat{E}g & b & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}x \\ \hat{A}y \\ \hat{E}z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{E}f \\ \hat{A}k \\ \hat{E}l \end{pmatrix}$$

De esta manera, el tetraedro fractal queda descrito por los  $12 \times 4 = 48$  parámetros de las cuatro transformaciones tridimensionales:

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$
$W_1$	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	0,00	0,00	1,00
$W_2$	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	0,00	0,87	-0,50
$W_3$	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	-0,87	-0,50	-0,50
$W_4$	0,50	0	0	0	0,50	0	0	0	0,50	0,87	-0,50	-0,50

Con objetos como éste se pueden proponer numerosas actividades didácticas que muestran una dinámica interconexión entre geometría y álgebra, así como interesantes aspectos de la autosimilaridad.

### Tercera etapa. Características de las figuras: expresiones algebraicas y representaciones gráficas

Pero esta experiencia didáctica no termina con la formación de algunas de las innumerables figuras distintas posibles. Si su diseño y construcción han resultado tareas interesantes y enriquecedoras, la utilidad posterior hace de los fractales lineales una herramienta formativa muy eficaz.

Las figuras formadas nos permitirán utilizar su autosimilaridad y las regularidades que muestran para la búsqueda de reglas numéricas que evidencien las relaciones entre los modelos geométricos y los modelos numéricos. Los resultados más significativos para estas figuras son las expresiones que se recogen en la tabla 1.

En primer lugar se determinan los parámetros  $r$  y  $s$  que describen estos modelos:  $r$  es el número de copias de la figura que conforman la etapa siguiente, y  $s$  es el factor de escala entre el elemento de una etapa y el de la siguiente.

Reconociendo la autosimilaridad de las figuras, y observando una parte lo más pequeña posible que contenga el generador, se cuenta el número de elementos que lo componen. Se hace el mismo recuento con una parte que contenga la segunda etapa y las siguientes de la construcción del fractal, comprobando la progresión geométrica que aparece en el número de elementos que forman estas figuras. En los primeros cursos de secundaria es conveniente

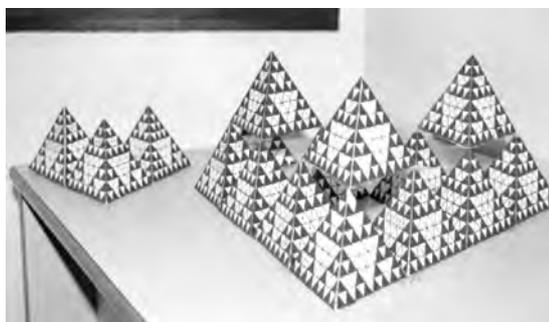


Figura 14. Tetraedros de Sierpinski en cartulina realizados por los estudiantes

Figura en la etapa $n$	Número de elementos $r^n$	Longitud del lado $s^n$	Perímetro	Área figura	Área eliminada	Dimensión fractal
Triángulo de Sierpinski	$3^n$	$2^{-n}$	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\frac{3^{-n}}{4}$	$\frac{1}{4} + \hat{A}_1 \frac{3^{-n}}{4}$	$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$
Trisección	$6^n$	$3^{-n}$	$\frac{6^n}{3^{n-1}}$	$\frac{5^{-n}}{6}$	$\frac{1}{3} + \hat{A}_1 \frac{2^{-n}}{3}$	$d = \frac{\log 6}{\log 3} = 1,631$
Aspas de Vicsek	$5^n$	$3^{-n}$	$\frac{4 \cdot 5^n}{3^n}$	$\frac{5^{-n}}{9}$	$\frac{4}{9} + \hat{A}_1 \frac{5^{-n}}{9}$	$d = \frac{\log 5}{\log 3} = 1,465$
Belinda	$3^n$	$2^{-n}$	$\frac{1+3^n}{2^{n-1}}$	$\frac{3^{-n}}{4}$	$\frac{1}{4} + \hat{A}_1 \frac{3^{-n}}{4}$	$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$
Punta de flecha	$5^n$	$3^{-n}$	$\frac{2(1+5^n)}{3^n}$	$\frac{5^{-n}}{9}$	$\frac{4}{9} + \hat{A}_1 \frac{5^{-n}}{9}$	$d = \frac{\log 5}{\log 3} = 1,465$
Columnas	$3^n$	$2^{-n}$	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\frac{3^{-n}}{4}$	$\frac{1}{4} + \hat{A}_1 \frac{3^{-n}}{4}$	$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$
Alfombra de Sierpinski	$8^n$	$3^{-n}$	$\frac{4}{5} \frac{4}{3^n} + \frac{8^n}{3^n}$	$\frac{8^{-n}}{9}$	$\frac{1}{9} + \hat{A}_1 \frac{8^{-n}}{9}$	$d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1,893$
Copo de estrellas	$3^n$	$2^{-n}$	$\frac{3^{n+1}}{2^n}$	$\frac{3^{-n}}{4}$	$\frac{1}{4} + \hat{A}_1 \frac{3^{-n}}{4}$	$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,585$

Tabla 1

recoger los resultados en una pequeña tabla que facilite la obtención de la regla general (Figueiras, 2000). El ejercicio de formalización que da lugar a estas expresiones no es trivial para los estudiantes de estos cursos, aunque resulte muy aconsejable.

En cada etapa, mientras que una potencia de  $r$  muestra el número de elementos que componen la figura, con el factor de escala  $s$  se expresa la longitud del lado de un elemento en función del lado de la figura inicial. Por tratarse de transformaciones contractivas, la longitud del lado será una potencia de base menor que la unidad. La combinación de ambos resultados permite obtener la expresión del perímetro de las figuras.

Consecuencia también de las reglas de construcción, del cambio de escala y del número de copias o elementos, aparece la secuencia de áreas para las diferentes etapas que puede expresarse mediante una ley potencial. Por simplicidad, es conveniente referirlas siempre al área del iniciador.

Pero si se interpreta la formación de las figuras como consecuencia de un proceso sencillo de eliminación de partes de la figura inicial, se obtiene el área que permanece en cada etapa, pudiendo generalizarse a la etapa  $n$ . Los resultados que se muestran en la tabla 1 mantienen la forma obtenida directamente en el proceso de eliminación para

*Algunos estudiantes al acceder a secundaria aún confunden los conceptos de área y perímetro, con lo que el debate con estos modelos les ayuda a superar esa dificultad.*

facilitar su interpretación. También se puede expresar porcentualmente la fracción del área inicial eliminada en cada iteración, y su acumulación.

Algunos estudiantes al acceder a secundaria aún confunden los conceptos de área y perímetro, con lo que el debate con estos modelos les ayuda a superar esa dificultad. Una vez obtenidas las secuencias numéricas que describen el área y el perímetro de cada figura, su análisis debe permitir de manera sencilla la obtención de la regla potencial que las generan y su expresión algebraica. La ocasión es excelente para revisar el crecimiento producido por una dependencia potencial según sea la base de la potencia mayor o menor que la unidad.

Cuáles son el perímetro y el área del atractor, son cuestiones interesantes para sugerir la idea de límite de estas sucesiones. El estudio de las sucesiones, y el cálculo de su límite —cuando existe—, se aborda normalmente en el bachi-

lterato desde un enfoque exclusivamente algebraico-analítico. En este trabajo se propone aprovechar la interpretación geométrica de las figuras fractales para analizar sucesiones geométricas y, en algún caso, calcular su límite. En estos ejemplos, a partir de una expresión recurrente se ha obtenido la fórmula explícita para la sucesión. La interpretación geométrica proporciona una aproximación más intuitiva al concepto de límite y permite establecer una conexión natural entre dos partes de la matemática que usualmente presentamos a nuestros estudiantes de manera desconexa: el análisis y la geometría (Cortés, 2000).

Pero además se puede estudiar en las figuras la evolución con las sucesivas iteraciones de estos conceptos geométricos comparando las razones geométricas, es decir, si se comparan algoritmos diferentes y se revisan los ritmos distintos con los que decrece el área, se reduce el lado, o crece el perímetro. Este resultado conectará con el valor de dimensión que asignemos a los fractales.

El estudio de los límites de las expresiones obtenidas para la etapa  $n$ -ésima, cuando  $n$  tiende a infinito, permite de manera intuitiva a los estudiantes de ESO y de manera formal a los de bachillerato, concluir que las figuras finales serán fractales de perímetro infinito y de área nula. En el límite, la suma de las áreas eliminadas se reduce a la suma infinita de los términos de una serie geométrica de razón menor que la unidad, con lo que la fracción eliminada es uno. Sin duda, estas dos conceptos no son idóneos para describir las figuras fractales.

En lugar de ellos, los fractales se caracterizan por su dimensión fractal  $d$ , generalización de la dimensión euclídea. A partir de la definición de medida de Hausdorff, que coincide con la longitud o el área para objetos euclídeos de dimensión 1 o 2, se define la dimensión fractal o de Hausdorff-Besicovitch de un objeto como el valor de  $d$  para el que con valores inferiores a él la medida del objeto es  $\infty$ , y con valores superiores la medida es 0 (Mandelbrot, 1997).

*La interpretación geométrica proporciona una aproximación más intuitiva al concepto de límite y permite establecer una conexión natural entre dos partes de la matemática que usualmente presentamos a nuestros estudiantes de manera desconexa: el análisis y la geometría.*

Todas las figuras construidas tienen longitud o perímetro infinito (medida infinita cuando  $d = 1$ ) y área nula (medida nula cuando  $d = 2$ ), lo que determina que la dimensión de estos objetos es un valor no entero comprendido entre 1 y 2, siendo objetos intermedios entre las líneas y las superficies de la geometría clásica. Ocupan más espacio que una línea, pero menos que una superficie. La dimensión es además una medida de la irregularidad del fractal.

Como los fractales lineales son autosimilares, en ellos la dimensión fractal coincide con la dimensión de homotecia, mucho más sencilla, que se puede presentar a los estudiantes de bachillerato para analizar la dimensión fractal de nuestras figuras, como propone Figueiras (2000). Los parámetros  $r$  y  $s$ , de cada figura, mediante la definición de dimensión de homotecia como  $d = \log s / \log r$ , dan lugar a las dimensiones fractales obtenidas en la última columna de la tabla 1.

En el tetraedro de Sierpinski, donde  $r = 2$  es el factor de escala, y  $s = 4$  es el número de partes generadas, se obtiene

$$d = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$$

por lo que tiene la misma dimensión que una superficie euclídea.

La tabla 2 muestra algunas de las relaciones numéricas que se encuentran el tetraedro de Sierpinski. Desde el número de tetraedros generados en cada etapa, sus vértices, aristas y superficie, hasta el volumen de la figura total serán elementos geométricos a estudiar, concluyendo que el tetraedro de Sierpinski es un objeto límite cuya área total permanece constante en todas las etapas de su generación –coincidente con el valor de  $d = 2$ –, pero con un volumen final nulo.

Para la interpretación de los resultados de ambas tablas se construyen algunas representaciones gráficas de las sucesiones obtenidas entendidas como funciones de variable entera. Con los estudiantes de ESO la actividad consiste en representar la evolución de las áreas, como aparecen en la figura 15, comparando las potencias de diferentes bases. También se representa el crecimiento de los perímetros de los distintos modelos fractales justificando su evolución con diferentes reglas potenciales.

La figura 15 presenta el área de las figuras obtenidas en diferentes etapas. Al igual que en la tabla 1, se normaliza a la unidad el área del iniciador. Los decrecimientos potenciales pueden compararse atendiendo a la base de cada potencia. Por otra parte, en la figura 16 se muestra el perímetro de las formas desarrolladas en sucesivas etapas. En todos los casos se normaliza a la unidad el lado del iniciador, con lo que resultan progresiones geométricas de razón mayor que la unidad. Los diferentes comportamientos son función de la razón de cada una de las sucesiones. Al buscar el perímetro y el área de la figura límite, estas

Iteración	Número de elementos	Número de aristas	Long. arista	Área	Octaedros eliminados	Volumen eliminado en la iteración	Volumen eliminado acumulado	Porcentaje acumulado
0	1	6	$a$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	0	0	0	0
1	4	24	$a/2$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$	$1/2$	50,00
2	16	96	$a/4$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	4	$\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$	75,00
3	64	384	$a/8$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	16	$\frac{\sqrt{2}}{96}a^3$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$	87,50
4	256	1536	$a/16$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	64	$\frac{\sqrt{2}}{192}a^3$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$	93,75
$n$	$4^n$	$6 \cdot 4^n$	$a/2^n$	$4^n \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$4^{n-1}$	$4^{n-1} \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{a^3}{2^n}$	$f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$	$\frac{2^n - 1}{2^n} \cdot 100$

volumen eliminado acumulado:  $V_n := \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+2}} \right]$

Tabla 2. Tetraedro de Sierpinski

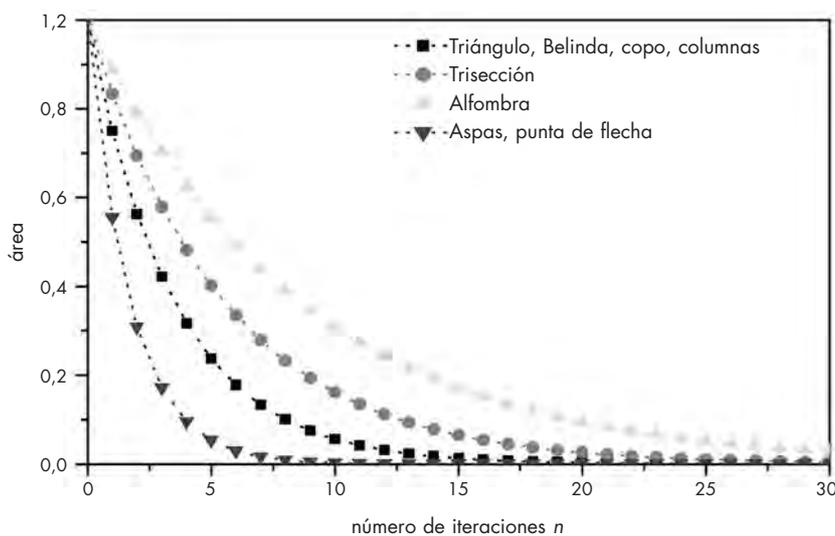


Figura 15. Evolución del área de las figuras

gráficas pueden favorecer la comprensión del concepto de límite de una sucesión.

Con estudiantes de bachillerato, con los que el análisis previo resulta muy pobre en contenidos, se propone como actividad la confección de la gráfica adecuada para conocer la relación potencial entre dos variables. Esta es la que aparece en la figura 17, donde se representan logarímicamente el área y el perímetro respecto a la etapa de la figura, y donde las progresiones geométricas se muestran como

dependencias lineales. Su análisis permite identificar el significado de la pendiente de cada recta e interpretar el orden relativo entre rectas. Aparecen dos pares de figuras con crecimientos del perímetro de la misma pendiente, que coinciden en la evolución de sus áreas.

Posteriormente se les pide que revisen la relación entre la dimensión fractal calculada para cada modelo y los crecimientos potenciales del perímetro, e incluso con la disminución del área, con lo que el debate sobre la irregularidad está garantizado. Se pueden aprovechar las representaciones gráficas para revisar las ideas de crecimiento y decrecimiento, continuidad y discreción, y límite de una sucesión geométrica.

La figura 18, de formato similar a la anterior, muestra la evolución de las características del tetraedro de Sierpinski en sus primeras etapas. Con un análisis parecido se deduce el crecimiento potencial del número de tetraedros que componen el objeto, y el decrecimiento de su volumen, que coincide con la longitud de la arista del elemento, ambos normalizados a la unidad en el iniciador. El área total de la estructura permanece invariable en cualquier

etapa, mientras que el volumen eliminado crece rápidamente convergiendo asintóticamente al 100 %.

### Diferentes entornos para su realización

La elaboración de estas figuras fractales de gran formato por los estudiantes de primer curso de bachillerato tecnológico, fue una de las actividades realizadas durante la *II Setmana de les Arts i les Ciències* que se celebró en el IES Leonardo da Vinci de Alicante para conmemorar el 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. El hecho fue recogido

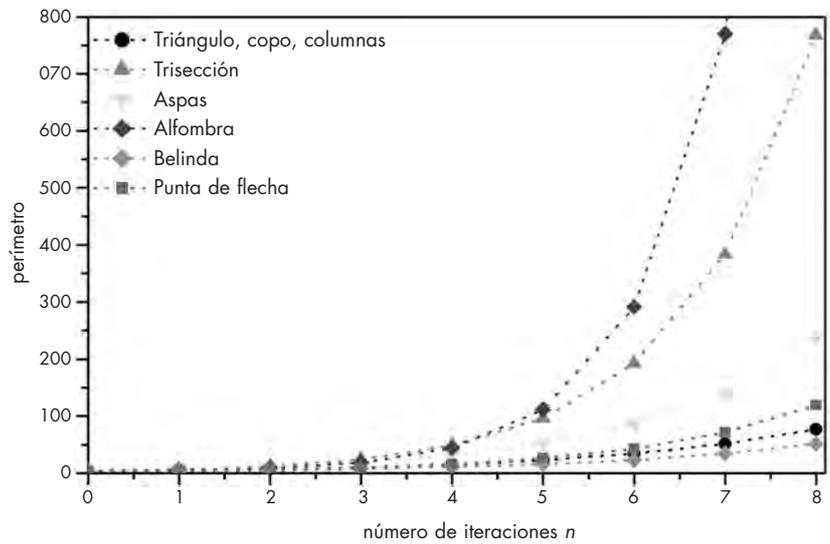


Figura 16. Evolución del perímetro de las figuras

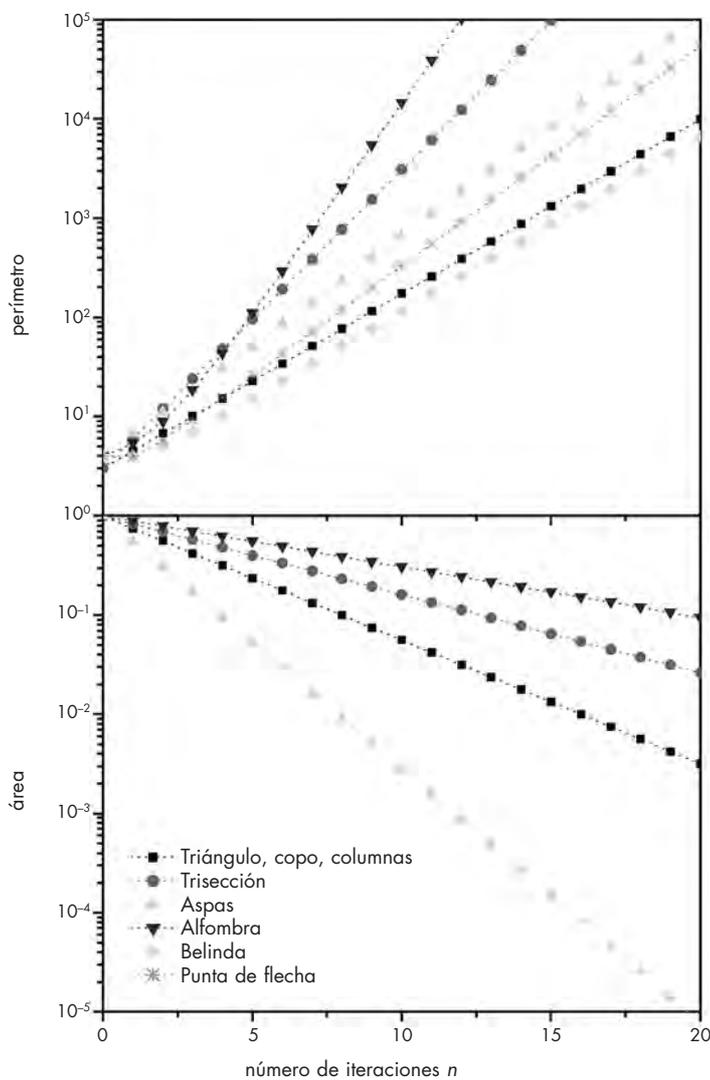


Figura 17. Representación logarítmica del perímetro y el área de las figuras

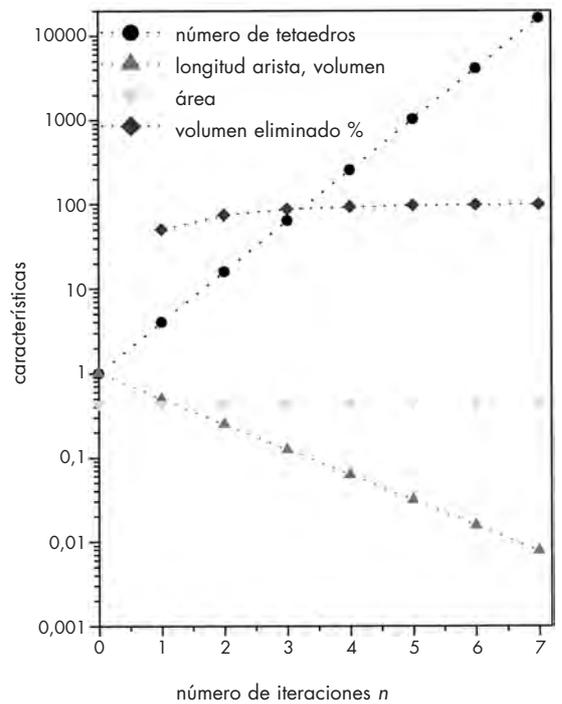


Figura 18. Evolución de las características del tetraedro de Sierpinski

en las páginas dedicadas a educación en la prensa regional, como aparece en la figura 19.

Los estudiantes universitarios también han desarrollado y estudiado estas figuras en uno de los talleres del curso de verano titulado *La Geometría Fractal*, que celebró la Universidad de Alicante en su sede de Cocentaina en julio de 2000, como muestran las figuras 4 y 5.

Por otra parte, algunas de estas figuras construidas en el aula fueron expuestas en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante durante la celebración de las *IV Jornades d'Educació Matemàtica*, desarrolladas por la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi», bajo el título conjunto de *Seis exposiciones de Centros de Secundaria* (figura 20).

## Resumen

Como muchas veces se ha referido (Peitgen, Moreno-Marín) el estudio de los fractales es una herramienta muy intere-



Figura 19. Hoja del diario *Información de Alicante* (12/04/2000)

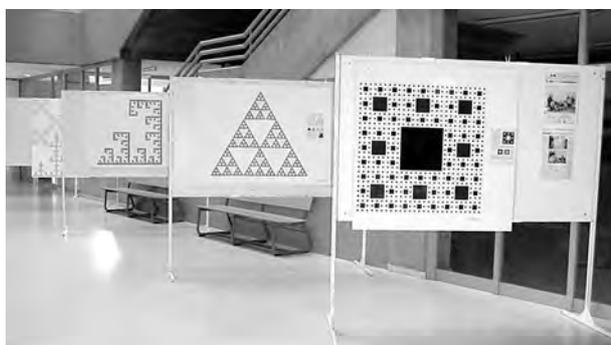


Figura 20. Exposición en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante

*Los distintos grados de dificultad, niveles de abstracción, y complejidad con que se pueden abordar estas tareas garantizan su versatilidad y sus posibilidades de aplicación en los distintos niveles educativos de la etapa secundaria.*

sante para el trabajo matemático en la enseñanza. En este artículo se muestran actividades muy variadas y fáciles de trasladar a la clase de matemáticas. Los distintos grados de dificultad, niveles de abstracción, y complejidad con que se pueden abordar estas tareas garantizan su versatilidad y sus posibilidades de aplicación en los distintos niveles educativos de la etapa secundaria.

La diversidad y las peculiaridades personales de los estudiantes, sus gustos y capacidades, se atienden en esta experiencia mediante actividades con diferentes grados posibles de implicación en las mismas, obteniendo unos resultados menos uniformes, pero más eficaces para cada uno de ellos.

Resulta especialmente interesante reforzar el trabajo en geometría durante los cursos de ESO, con la construcción y descripción de estas figuras. La actividad manual, junto con lo novedoso del tema despierta el interés de los estudiantes que, además de reforzar sus conocimientos geométricos y matemáticos, difícilmente olvidarán que estudiaron fractales en secundaria.

## Referencias bibliográficas

- BARNESLEY, M.F. (1993): *Fractals Everywhere*, Academic Press, Londres.
- BOLT, B. (1998): ¿Qué es la geometría?, *Suma*, n.º 29, 5-16.
- CORTÉS LÓPEZ, J.C. y J.A. ALEDO SÁNCHEZ (2000): «Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas», *Suma*, n.º 34, 53-58.
- FIGUEIRAS, L., M. MOLERO, A. SALVADOR, y N. ZUASTI (2000): «Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales», *Suma*, n.º 35, 45-54.
- MANDELBROT, B. (1977): *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets.
- MORENO-MARÍN, J. C. (2001): *El Juego del Caos en la calculadora gráfica: Construcción de fractales, Enseñanza de las Ciencias* (en prensa).
- PEITGEN, H.O., H. JÜRGENS y D. SAUPE (1992): *Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, Nueva York.
- SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. (1997): «La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato», *Suma*, n.º 25, 17-22.

**Juan Carlos Moreno**  
IES Leonardo da Vinci  
Alicante  
Dpto. Física Aplicada,  
Fac. Ciencias  
Universidad de Alicante  
Societat d'Educació  
Matemàtica de la Comunitat  
Valenciana «Al-Khwarizmi»